



Lição de Síntese: Exercícios Resolvidos

Apresenta-se, aqui, uma coleção de 38 exercícios resolvidos relacionados com a Lição de Síntese. A sua função é a de levar os alunos, que eventualmente venham a frequentar o seminário sinóptico correspondente a esta Lição, a praticar os conhecimentos transmitidos.

Exercício 1

Verifique que, se $u = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_1) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \subset Cl_2$ e $v = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{12} \in \mathbb{R}^2 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 \subset Cl_2$, então u (um paravector) é idempotente e v é nilpotente.

Resolução

$$u^2 = \frac{1}{4}(1 + \mathbf{e}_1)(1 + \mathbf{e}_1) = \frac{1}{4}(1 + 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^2) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_1) = u$$

$$v^2 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{12})(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{12}) = \mathbf{e}_1^2 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_{12}^2 = 0$$

Exercício 2

Considere o vector $\mathbf{a} = 8\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2 \subset Cl_2$. Determine as respectivas componentes \mathbf{a}_{\parallel} e \mathbf{a}_{\perp} em relação ao vector $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2 \subset Cl_2$.

Resolução

$$\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = (16 - 1) \frac{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{(4 + 1)} = 6\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{b}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{12} (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_{12} (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2$$

Exercício 3

Verifique que $Cl_2 \cong \text{Mat}(2, \mathbb{R})$. Sugestão: Considere as correspondências contidas na tabela anexa.

Cl_2	$\text{Mat}(2, \mathbb{R})$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
\mathbf{e}_{12}	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Resolução

Basta verificar que as relações

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = -\mathbf{e}_{12}^2 = 1$$

se verificam com as respectivas imagens matriciais isomorfas. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, tem-se $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{12}$ como se pode verificar através de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Também $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_{12}$ já que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um elemento genérico (i.e., um multivector) $u \in Cl_2$ será isomorfo a

$$\left| \begin{aligned} u &= \alpha + \mathbf{a} + \beta \mathbf{e}_{12} = \alpha + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_{12} \cong \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + a_1 & a_2 + \beta \\ a_2 - \beta & \alpha - a_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Exercício 4

Calcule em Cl_2 : $u = \exp\left(\frac{\pi}{2}\mathbf{e}_1\right)$; $v = \exp\left(\frac{\pi}{2}\mathbf{e}_{12}\right)$.

Resolução

A principal diferença reside no facto de se ter $\mathbf{e}_1^2 = 1$ e $\mathbf{e}_{12}^2 = -1$. Vem então

$$u = \exp\left(\frac{\pi}{2}\mathbf{e}_1\right) = \cosh\frac{\pi}{2} + \mathbf{e}_1 \sinh\frac{\pi}{2} \approx 2.5092 + 2.3013\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$$

$$v = \exp\left(\frac{\pi}{2}\mathbf{e}_{12}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \mathbf{e}_{12} \sin\frac{\pi}{2} = \mathbf{e}_{12} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$$

Exercício 5

Verifique que a parte ímpar $Cl_2^- = \mathbb{R}^2$ não constitui uma subálgebra de Cl_2 .

Resolução

Basta ter em consideração que $Cl_2^- Cl_2^- \subset Cl_2^+$. Com efeito, tem-se

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 = Cl_2^+.$$

Exercício 6

Determine, em Cl_2 , o resultado da operação (de rotação) $\mathbf{R}(\mathbf{a}) = R\mathbf{a}\tilde{R}$ que transforma

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{a}' \in \mathbb{R}^2. \text{ Considere } \mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \text{ e } R = \cos\left(\frac{\pi}{4}\mathbf{e}_{12}\right).$$

Resolução

Basta ter em consideração que

$$R = \cos\left(\frac{\pi}{4}\mathbf{e}_{12}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{e}_{12} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathbf{e}_{12}), \quad \tilde{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \mathbf{e}_{12}).$$

Logo, vem sucessivamente

$$\mathbf{a}' = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{12})(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)(1 - \mathbf{e}_{12}) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{12})(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2.$$

Trata-se, portanto, de uma rotação de $\pi/2$ no sentido determinado por \mathbf{e}_{12} . Com efeito, como facilmente se verifica, tem-se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}' = 0$. Uma forma mais expedita de calcular \mathbf{a}' consiste em reconhecer que todos os vectores anti-comutam com o bivector unitário, pelo que

$$\mathbf{a}' = R \mathbf{a} \tilde{R} = R^2 \mathbf{a} = \exp\left(\frac{\pi}{2} \mathbf{e}_{12}\right) \mathbf{a} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + \mathbf{e}_{12} \sin \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{a} = \mathbf{e}_{12} \mathbf{a} = \mathbf{e}_{12} (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2.$$

Exercício 7

Considere um operador linear $\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, numa base ortonormada $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ de \mathbb{R}^2 , se tem $\mathbf{g}(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{g}(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Comece por mostrar que, se se fizer $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1$, então $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \lambda_2 \mathbf{a} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$. Para $\mathbf{c} = \cos \theta \mathbf{f}_1 + \sin \theta \mathbf{f}_2$, calcule a matriz $G = (g_{ij})$ que representa o operador na nova base ortonormada $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.

Resolução

Comecemos por notar que se pode escrever sucessivamente:

$$\mathbf{a} = P_1(\mathbf{a}) + P_2(\mathbf{a}) \Rightarrow \lambda_2 \mathbf{a} = \lambda_2 P_1(\mathbf{a}) + \lambda_2 P_2(\mathbf{a})$$

$$P_1(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1, \quad P_2(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2$$

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{a}) &= \mathbf{g}(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2) = a_1 \mathbf{g}(\mathbf{e}_1) + a_2 \mathbf{g}(\mathbf{e}_2) = a_1 \lambda_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \lambda_2 \mathbf{e}_2 \\ &= \lambda_1 P_1(\mathbf{a}) + \lambda_2 P_2(\mathbf{a}) \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{a}) &= \lambda_1 P_1(\mathbf{a}) + [\lambda_2 \mathbf{a} - \lambda_2 P_1(\mathbf{a})] \\ &= \lambda_2 \mathbf{a} + (\lambda_1 - \lambda_2) P_1(\mathbf{a}) \end{aligned} \right.$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 \Rightarrow \boxed{\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \lambda_2 \mathbf{a} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c}}.$$

Basta, agora, ter em consideração que

$$g_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{f}_j).$$

Em particular, tem-se

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}_1) = \lambda_2 \mathbf{f}_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{g}(\mathbf{f}_1) = \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{c})^2 \\ \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{g}(\mathbf{f}_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{c})(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{c}) \end{cases}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}_2) = \lambda_2 \mathbf{f}_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{g}(\mathbf{f}_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{c})(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{c}) \\ \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{g}(\mathbf{f}_2) = \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{c})^2 \end{cases}$$

Logo, vem

$$G = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta \cos \theta \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta \cos \theta & \lambda_1 \sin^2 \theta + \lambda_2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Para $\theta = 0$ recupera-se o caso inicial em que $\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1$ e $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2$:

$$G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: A forma da matriz G é a mais simples possível (i.e., tem a forma diagonal) no referencial dos vectores próprios $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ do operador \mathbf{g} (os valores diagonais são os valores próprios).

Nota: Desde que o operador em questão seja real e simétrico é possível garantir que ele é diagonalizável, que se verifica a relação de completude $\mathbf{a} = \mathbf{P}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{P}_2(\mathbf{a})$ e ainda que todos os valores próprios e vectores próprios são reais. Se existem dois valores próprios distintos é $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \lambda_2 \mathbf{a} + (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c}$ (operador uniaxial). Caso exista um único valor próprio $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ então é simplesmente $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \lambda_0 \mathbf{a}$ (operador isotrópico). A forma quadrática $Q(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r})$, em que $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$, é então simétrica. A curva $Q = 1$ corresponde, no referencial dos eixos principais (i.e., no referencial constituído pelos vectores próprios), à equação $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$. Os seguintes casos podem ocorrer: (i) um dos valores próprios é nulo – as curvas resultantes são duas linhas rectas; (ii) um dos valores próprios é negativo – a curva resultante é uma hipérbole; (iii) os dois valores próprios são positivos – a curva resultante é uma elipse (que se reduz ao caso particular de uma circunferência quando os dois valores próprios são iguais). Note-se, por fim, que os dois valores próprios não podem ser ambos negativos – a equação $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$ não teria, nesse caso, qualquer solução com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exercício 8

Mostre que o corpo \mathbb{C} não pode ser ordenado. Sugestão: Um corpo \mathbb{F} pode ser ordenado se existir um subconjunto $P \subset \mathbb{F}$ tal que (i) $0 \notin P$, (ii) para todos os $a \in \mathbb{F}$, tais que $a \neq 0$, ou $a \in P$ ou $a \notin P$, (iii) $a + b \in P$ e $ab \in P$, para quaisquer $a, b \in P$. Ao conjunto dos

elementos de P é costume dar o nome de números positivos. Escreve-se $a > b$ quando $a - b \in P$ e ainda $a \geq b$ quando $a - b \in P \cup \{0\}$. Ao conjunto $-P = \{-a \mid a \in P\}$ dá-se o nome de conjunto dos números negativos.

Resolução

Num corpo ordenado os números diferentes de zero (elemento neutro da adição) têm quadrados positivos e a soma desses quadrados é, portanto, também positiva. Ora acontece que em \mathbb{C} a igualdade $i^2 + 1 = 0$ também se escreve $i^2 + 1^2 = 0$ o que significa que $i^2 + 1^2 \notin P$ (i.e., é falsa a desigualdade $i^2 + 1^2 > 0$) sendo que, neste caso, tanto $i \neq 0$ como $1 \neq 0$. Daqui se infere que não é possível estabelecer uma relação de ordem em \mathbb{C} .

Exercício 9

O anel de divisão dos quaterniões \mathbb{H} não é um corpo porque a operação de multiplicação não é comutativa: e.g., $k = ij \neq ji = -k$. Porém, se $ab = ba$ então $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$. Contudo, $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$ não implica necessariamente que $ab = ba$ como este exercício pretende mostrar: verifique que assim é para $a = 3\pi i$ e $b = 4\pi j$.

Resolução

Façamos então $a = 3\pi i$ e $b = 4\pi j$. Neste caso tem-se $ab = 12\pi^2 k$ e $ba = -12\pi^2 k$, i.e., $ab \neq ba$. No entanto, como facilmente se verifica, tem-se $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$. Com efeito, tem-se sucessivamente

$$\exp(a) = \exp(3\pi i) = \cos(3\pi) + i \sin(3\pi) = -1$$

$$\exp(b) = \exp(4\pi j) = \cos(4\pi) + j \sin(4\pi) = 1$$

$$\begin{cases} (3i+4j)^{2k} = (-1)^k 5^{2k} \\ (3i+4j)^{2k+1} = (-1)^k 5^{2k} (3i+4j) \end{cases}$$

$$\exp(a+b) = \exp[\pi(3i+4j)] = \cos(5\pi) + \frac{1}{5}(3i+4j)\sin(5\pi) = -1$$

$$\therefore \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

Exercício 10

Verifique o isomorfismo $Cl_3 \simeq \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ usando as matrizes de Pauli como se indica na tabela anexa.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cl_3	$\text{Mat}(2, \mathbb{C})$
1	I
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
$\mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12}$	$\sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2$
\mathbf{e}_{123}	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

Resolução

Basta verificar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I, \\ \sigma_2\sigma_3 &= -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \\ \sigma_3\sigma_1 &= -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2, \\ \sigma_1\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3. \end{aligned}$$

Note-se, a propósito, que $Cl_3^+ = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}$ já que

Cl_3^+	\mathbb{H}
$-\mathbf{e}_{23}$	i
$-\mathbf{e}_{31}$	j
$-\mathbf{e}_{12}$	k

$$q = q_0 + i q_1 + j q_2 + k q_3 \in \mathbb{H} \simeq q_0 I + i (q_1 \sigma_1 + q_2 \sigma_2 + q_3 \sigma_3) = \begin{pmatrix} q_0 + i q_3 & i q_1 + q_2 \\ i q_1 - q_2 & q_0 - i q_3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}).$$

Exercício 11

Supondo que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$, com $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, mostre que se pode escrever

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{[\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}.$$

Resolução

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - \mathbf{a}^2 \mathbf{b} \\ [\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \wedge \mathbf{b} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \\ \therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \frac{[\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}. \end{aligned}$$

Exercício 12

Mostre que, em Cl_3 , se tem $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{b} \mathbf{e}_{123}) \lrcorner \mathbf{a}$ para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

Resolução

Façamos uma demonstração usando uma perspectiva algébrica, i.e., de manipulação das componentes. Numa base ortonormada $\mathcal{B}_s = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, podemos escrever

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{b} \mathbf{e}_{23} = b_1 \mathbf{e}_{23} + b_2 \mathbf{e}_{31} + b_3 \mathbf{e}_{12} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3.$$

Notando que se tem

$$\begin{array}{|l} \mathbf{e}_1 \lrcorner \mathbf{e}_{31} = -\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 \lrcorner \mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} \mathbf{e}_2 \lrcorner \mathbf{e}_{23} = \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \lrcorner \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{e}_1 \end{array} \quad \begin{array}{|l} \mathbf{e}_3 \lrcorner \mathbf{e}_{23} = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \lrcorner \mathbf{e}_{31} = \mathbf{e}_1 \end{array}$$

$$(\text{exemplo: } \mathbf{e}_1 \lrcorner \mathbf{e}_{31} = \mathbf{e}_1 \lrcorner (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3)$$

tira-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \mathbf{e}_{23}) &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \lrcorner (b_1 \mathbf{e}_{23} + b_2 \mathbf{e}_{31} + b_3 \mathbf{e}_{12}) \\ &= (-a_1 b_2 \mathbf{e}_3 + a_1 b_3 \mathbf{e}_2) + (a_2 b_1 \mathbf{e}_3 - a_2 b_3 \mathbf{e}_1) + (-a_3 b_1 \mathbf{e}_2 + a_3 b_2 \mathbf{e}_1) \\ &= (a_3 b_2 - a_2 b_3) \mathbf{e}_1 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{e}_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Por outro lado, vem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3.$$

Daqui se infere que

$$\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \mathbf{e}_{23}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

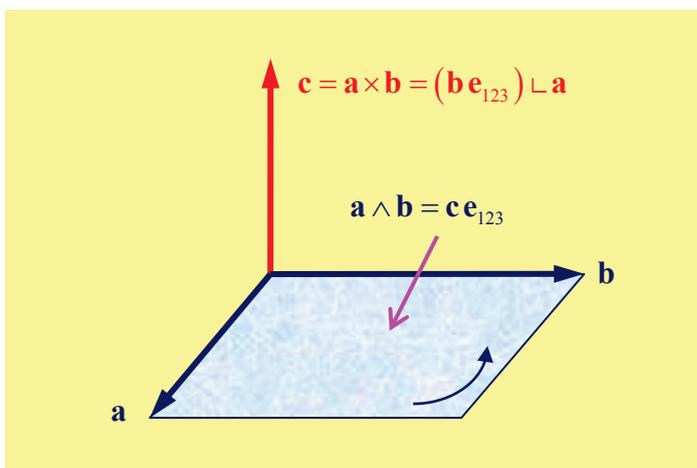
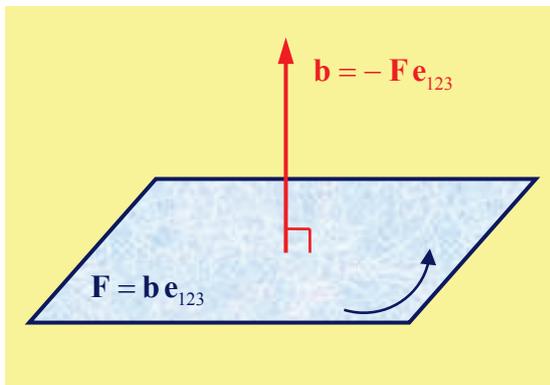
Logo, atendendo a que

$$\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \mathbf{e}_{23}) = -[(\mathbf{b} \mathbf{e}_{23}) \lrcorner \mathbf{a}]$$

vem finalmente

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{b} \mathbf{e}_{123}) \lrcorner \mathbf{a}, \text{ Q.E.D.}$$

Notemos que, só em Cl_3 , é que o dual de um vector é um bivector. O respectivo significado geométrico é o que se indica nas figuras anexas.



Exercício 13

Prove a regra fundamental da contracção à esquerda

regra fundamental da contracção à esquerda	→	$\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}$
--	---	---

onde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ são vectores.

Resolução

Comecemos por definir o bivector $\mathbf{F} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. O que se pretende provar é então que

$$\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}.$$

Da definição de produto exterior

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{bc} - \mathbf{cb})$$

resulta que

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{bc} - \mathbf{cb}) = \frac{1}{2}(\mathbf{ab})\mathbf{c} - \frac{1}{2}(\mathbf{ac})\mathbf{b}.$$

Logo, como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \Rightarrow \mathbf{ab} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{ba}$$

infere-se ainda que

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \frac{1}{2}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{ba}]\mathbf{c} - \frac{1}{2}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{ca}]\mathbf{b} \\ &= [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}] - \frac{1}{2}(\mathbf{bac} - \mathbf{cab}) \end{aligned} \right.$$

Por outro lado, tem-se

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{bac} - \mathbf{cab}) &= \frac{1}{2}\mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \frac{1}{2}\mathbf{c}(\mathbf{ab}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{b}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{ca}] - \frac{1}{2}\mathbf{c}[2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{ba}] \\ &= [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}] - \frac{1}{2}(\mathbf{bca} - \mathbf{cba}) \\ &= [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}] - \frac{1}{2}(\mathbf{bc} - \mathbf{cb})\mathbf{a} \\ &= [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}] - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} \end{aligned} \right.$$

pelo que, após substituir esta última expressão na anterior, se obtém

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}] - [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}] + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a}$$

$$\therefore \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}.$$

Infere-se, deste modo, que

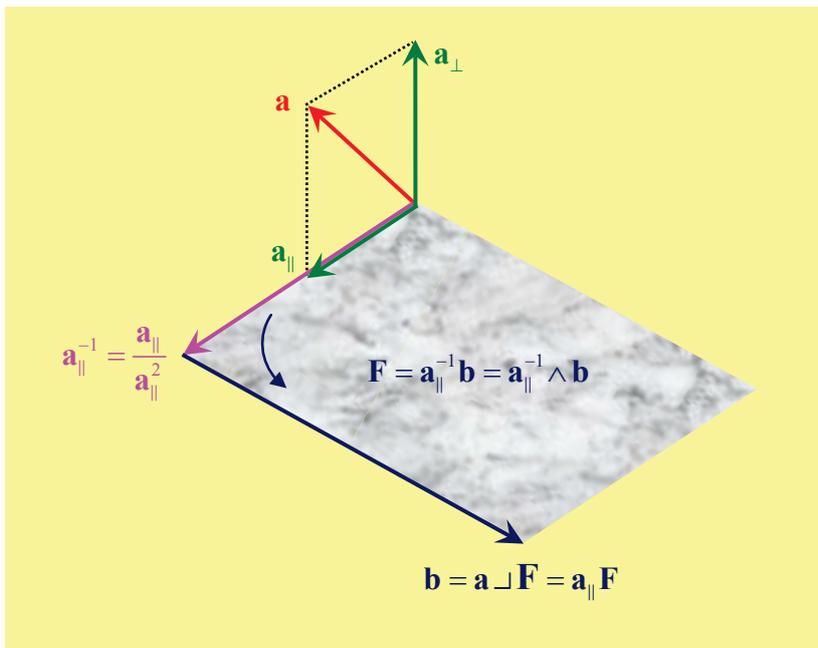
$$\mathbf{aF} - \mathbf{Fa} = 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}.$$

Ao definir a contracção à esquerda como

$$\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbf{F} - \mathbf{F} \mathbf{a})$$

tira-se então que

$$\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}, \text{ QED.}$$



Note-se que se define a contracção à direita como sendo

$$\mathbf{F} \lrcorner \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{F}).$$

Imediatamente se infere desta definição que

$$\boxed{\mathbf{F} \lrcorner \mathbf{a} = -\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F}}.$$

Em geral tem-se então para a produto geométrico de um vector com um bivector

$$\mathbf{a} \mathbf{F} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbf{F} - \mathbf{F} \mathbf{a})}_{\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbf{F} + \mathbf{F} \mathbf{a})}_{\mathbf{a} \wedge \mathbf{F}}$$

resultado este que deve ser contrastado com o produto geométrico entre dois vectores

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{a})}_{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{a})}_{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}.$$

Da regra fundamental da contracção à esquerda resulta a seguinte decomposição de um dado vector

$$\mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \underbrace{(\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{a}_{\parallel}} + \underbrace{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{a}_{\perp}}.$$

Conclusão: A componente \mathbf{a}_{\parallel} é a *projecção* de \mathbf{a} em relação a \mathbf{F} enquanto que a componente \mathbf{a}_{\perp} é a *rejeição* de \mathbf{a} em relação a \mathbf{F} .

Nota final: A regra fundamental da contracção à esquerda é a regra dual da conhecida propriedade do produto externo

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Com efeito, tem-se a seguinte dualidade de Clifford

$$\boxed{\text{dualidade de Clifford}} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} \end{cases}.$$

Exercício 14

Seja $\mathcal{B}_s = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a base canónica de \mathbb{R}^3 . Faça os seguintes cálculos em \mathcal{Cl}_3 .

a) Para o bivector $\mathbf{F} = 3\mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{23}$ calcule \mathbf{F}^2 e \mathbf{F}^{-1} .

Solução: $\mathbf{F}^2 = -10$; $\mathbf{F}^{-1} = -0.3\mathbf{e}_{12} + 0.1\mathbf{e}_{23}$.

b) Para o vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3$ e o bivector $\mathbf{F} = 4\mathbf{e}_{12} + 5\mathbf{e}_{13} - \mathbf{e}_{23}$ calcule $\mathbf{a} \wedge \mathbf{F}$ e $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F}$.

Solução: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{F} = 11\mathbf{e}_{123}$; $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F} = -47\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3$.

c) Calcule a projecção \mathbf{a}_{\parallel} e a rejeição \mathbf{a}_{\perp} do vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3$ em relação ao bivector $\mathbf{F} = 7\mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{13}$.

Solução: $\mathbf{a}_{\parallel} = (\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} = 3\mathbf{e}_1 + 4.9\mathbf{e}_2 + 0.7\mathbf{e}_3$; $\mathbf{a}_{\perp} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} = -0.9\mathbf{e}_2 + 6.3\mathbf{e}_3$.

Exercício 15

Seendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, um multivector genérico da álgebra geométrica Cl_3 escreve-se na forma $u = \alpha + \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e}_{123} + \beta\mathbf{e}_{123}$. Então o reverso é o multivector $\tilde{u} = \alpha + \mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{e}_{123} - \beta\mathbf{e}_{123}$ e o conjugado de Clifford é $\bar{u} = \alpha - \mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{e}_{123} + \beta\mathbf{e}_{123}$. Determine $u\bar{u}$, $u\tilde{u}$, u^{-1} e $|u|^2$.

Resolução

Como o centro da álgebra é $Z(Cl_3) = \mathbb{R} \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C}$, infere-se facilmente que

$$u\bar{u} = (\alpha^2 - \beta^2 - \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) + 2(\alpha\beta - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}_{123} \in Z(Cl_3),$$

$$u\tilde{u} = (\alpha^2 + \beta^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) + 2(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3.$$

Note-se, porém, que $u\tilde{u} \neq \tilde{u}u$ já que

$$\tilde{u}u = (\alpha^2 + \beta^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) + 2(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$$

$$\therefore \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{4}(u\tilde{u} - \tilde{u}u) \in \mathbb{R}^3.$$

Tem-se ainda

$$\boxed{\text{anti-automorfismos}} \rightarrow \begin{cases} \overline{uv} = \bar{v}\bar{u} \\ \widetilde{uv} = \tilde{v}\tilde{u} \end{cases} \quad u, v \in Cl_3.$$

Finalmente, como $u\bar{u} = \bar{u}u \in Z(Cl_3)$, tem-se

$$u^{-1} = \frac{\bar{u}}{u\bar{u}} = \frac{(\alpha - \mathbf{a}) + (\beta - \mathbf{b})\mathbf{e}_{123}}{(\alpha^2 - \beta^2 - \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) + 2(\alpha\beta - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}_{123}}, \quad uu^{-1} = u^{-1}u = 1.$$

Quanto à norma de u , vem

$$|u|^2 = \langle u\tilde{u} \rangle_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2.$$

Note-se, em particular, que

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}\mathbf{b}| &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|^2 \\ &= \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \cos^2 \theta + \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 \sin^2 \theta = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

em que $\theta = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Ou seja:

$$|\mathbf{a}\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|, \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|, \quad |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

Exercício 16

Sendo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in C\ell_3$ prove que

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}).$$

Sugestão: Use a propriedade da contracção à esquerda

$$(u \wedge v) \lrcorner w = u \lrcorner (v \lrcorner w)$$

válida para $u, v, w \in \wedge \mathbb{R}^3$.

Resolução

Se se usar a propriedade

$$(u \wedge v) \lrcorner w = u \lrcorner (v \lrcorner w)$$

para $u = \mathbf{a}$, $v = \mathbf{b}$ e $w = \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$, vem imediatamente

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \mathbf{a} \lrcorner [\mathbf{b} \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})].$$

Além disso, reconhecendo que $\mathbf{b} \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^3$, podemos ainda escrever

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d})].$$

Por outro lado, pela regra fundamental da contracção à esquerda,

$$\mathbf{b} \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c}.$$

Logo, tem-se

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \lrcorner (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) &= \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c}] \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Nota sobre a álgebra exterior de Grassmann:

A álgebra exterior de Grassmann é uma álgebra estabelecida em \mathbb{R}^3 através do produto exterior (embora, ao contrário da álgebra de Gibbs, seja imediatamente extensível a outras dimensões). Mais especificamente, no caso da álgebra exterior de \mathbb{R}^3 (que se designa por $\wedge \mathbb{R}^3$), trata-se da soma directa dos subespaços

$$\wedge \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3$$

a que corresponde, portanto, a seguinte base

base de $\wedge \mathbb{R}^3$	escalar	1
	vectores	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$
	bivectores	$\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$
	trivectores	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$

relativamente a uma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{R}^3 . Note-se que o produto exterior, sendo um produto associativo (a álgebra exterior de Grassmann é uma álgebra associativa – tal como a álgebra geométrica de Clifford), goza das seguintes propriedades básicas

propriedades do produto exterior	$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i, \quad i \neq j$ $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$
-------------------------------------	---

para $i, j \in \{1, 2\}$. Tal como Cl_3 trata-se de uma álgebra em que

$$\dim(\wedge \mathbb{R}^3) = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 = 8.$$

Assim, também, escreve-se

$$u = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3 \in \wedge \mathbb{R}^3$$

e definem-se as seguintes involuções

involução de grau	$\hat{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 + \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3$
reversão	$\tilde{u} = \langle u \rangle_0 + \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 - \langle u \rangle_3$
conjugação de Clifford	$\bar{u} = \langle u \rangle_0 - \langle u \rangle_1 - \langle u \rangle_2 + \langle u \rangle_3$

Nestas condições, sendo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ e $u, v, w \in \wedge \mathbb{R}^3$, define-se a contracção à esquerda com base nas seguintes três propriedades

regras da contracção à esquerda	$\begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{x} \lrcorner \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ (2) \quad & \mathbf{x} \lrcorner (u \wedge v) = (\mathbf{x} \lrcorner u)v + \hat{u} \lrcorner (\mathbf{x} \lrcorner v) \\ (3) \quad & (u \wedge v) \lrcorner w = u \lrcorner (v \lrcorner w) \end{aligned}$
---------------------------------------	---

Neste exercício utilizaram-se, apenas, a primeira e a terceira propriedades. Note-se que, da segunda regra e fazendo $u = \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ e $v = \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, se obtém a «regra fundamental da contracção à esquerda» $\mathbf{x} \lrcorner (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \lrcorner \mathbf{y})\mathbf{z} - \mathbf{y} \lrcorner (\mathbf{x} \lrcorner \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y}$ (uma vez que $\hat{u} = -\mathbf{y}$).

Exercício 17

Considere, no espaço linear (ou vectorial) \mathbb{R}^3 , a base não ortonormada $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ constituída pelos vectores

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Na base canónica (ortonormada) $\mathcal{B}_s = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ um dado vector escreve-se na forma $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$. Determine as componentes desse vector na base \mathcal{B} .

Resolução

Comecemos por verificar que $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ é, efectivamente, uma base de \mathbb{R}^3 . Tem-se, de facto,

$$\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{123} = 2\mathbf{e}_{123} \neq 0.$$

A respectiva base dual (ou recíproca) será então $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3\}$ tal que

$$\mathbf{f}^1 = \frac{\mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3}{\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3} = \frac{1}{2\mathbf{e}_{123}}(-\mathbf{e}_{23} + \mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{12}) = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{f}^2 = \frac{\mathbf{f}_3 \wedge \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3} = \frac{1}{2\mathbf{e}_{123}}(\mathbf{e}_{23} - \mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{12}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{f}^3 = \frac{\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2}{\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3} = \frac{1}{2\mathbf{e}_{123}}(\mathbf{e}_{23} + \mathbf{e}_{31} - \mathbf{e}_{12}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$$

uma vez que

$$\mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{12} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_{23} + \mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{12}$$

$$\mathbf{f}_3 \wedge \mathbf{f}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{12} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_{23} - \mathbf{e}_{31} + \mathbf{e}_{12}$$

$$\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{23} & \mathbf{e}_{31} & \mathbf{e}_{12} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_{23} + \mathbf{e}_{31} - \mathbf{e}_{12}$$

Com efeito, deverá ter-se

$$\mathbf{f}^i(\mathbf{f}_j) = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta_j^i, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

A métrica é dada por

$$G^{-1} = (g^{ij}) = (\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}^j) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow G = (g_{ij}) = (\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tendo-se, portanto,

$$\boxed{\text{convenção da soma}} \rightarrow \mathbf{f}^i = g^{ij} \mathbf{f}_j, \quad \mathbf{f}_i = g_{ij} \mathbf{f}^j.$$

Assim, como a métrica identifica vectores com formas-1, tem-se

$$\mathbf{a} = \underbrace{a^1 \mathbf{f}_1 + a^2 \mathbf{f}_2 + a^3 \mathbf{f}_3}_{\text{vector}} = \underbrace{a_1 \mathbf{f}^1 + a_2 \mathbf{f}^2 + a_3 \mathbf{f}^3}_{\text{forma-1}}$$

em que

$$\boxed{\text{componentes}} \rightarrow \begin{cases} a^1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}^1 = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3}{\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3} = -2 \\ a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}^2 = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{f}_3 \wedge \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3} = 3 \\ a^3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}^3 = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2}{\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a} = -2\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2}.$$

Já agora, tem-se também

$$\mathbf{f}^1 \wedge \mathbf{f}^2 \wedge \mathbf{f}^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_{123} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_{123}$$

$$\boxed{\text{componentes}} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{f}^2 \wedge \mathbf{f}^3}{\mathbf{f}^1 \wedge \mathbf{f}^2 \wedge \mathbf{f}^3} = -1 \\ a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{f}^3 \wedge \mathbf{f}^1}{\mathbf{f}^1 \wedge \mathbf{f}^2 \wedge \mathbf{f}^3} = 4 \\ a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}_3 = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{f}^1 \wedge \mathbf{f}^2}{\mathbf{f}^1 \wedge \mathbf{f}^2 \wedge \mathbf{f}^3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{a} = -\mathbf{f}^1 + 4\mathbf{f}^2 + \mathbf{f}^3}.$$

Exercício 18

Numa base $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ de \mathbb{R}^3 , um dado vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ escreve-se na forma

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{f}_i = a^1 \mathbf{f}_1 + a^2 \mathbf{f}_2 + a^3 \mathbf{f}_3.$$

Sendo $\mathbf{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função anti-simétrica, mostre que

$$\boxed{\text{função anti-simétrica e bivetor característico}} \rightarrow \boxed{\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F}}$$

em que $\mathbf{F} \in \wedge^2 \mathbb{R}^3$ é o bivetor

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{f}^i \wedge \mathbf{g}(\mathbf{f}_i) = \frac{1}{2} [\mathbf{f}^1 \wedge \mathbf{g}(\mathbf{f}_1) + \mathbf{f}^2 \wedge \mathbf{g}(\mathbf{f}_2) + \mathbf{f}^3 \wedge \mathbf{g}(\mathbf{f}_3)]$$

que se designa, por essa razão, o bivetor característico da função \mathbf{g} .

Resolução

Começemos por notar que, se $\mathbf{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função, então – por definição de função adjunta – tem-se

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$$

onde $\bar{\mathbf{g}}$ é a respectiva função adjunta. No caso de uma função simétrica é $\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g}$. No caso de uma função anti-simétrica é $\bar{\mathbf{g}} = -\mathbf{g}$. Logo, se \mathbf{g} é anti-simétrica, então

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3.$$

Da definição do bivetor característico resulta imediatamente que

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F}) &= \mathbf{a} \lrcorner [\mathbf{f}^i \wedge \mathbf{g}(\mathbf{f}_i)] \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}^i) \mathbf{g}(\mathbf{f}_i) - [\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{f}_i)] \mathbf{f}^i \\ &= \mathbf{g}[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}^i) \mathbf{f}_i] + [\mathbf{g}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{f}_i] \mathbf{f}^i \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{a}) + \mathbf{g}(\mathbf{a}) \\ &= 2\mathbf{g}(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

onde se utilizou a convenção da soma, a regra fundamental da contracção à esquerda e a definição de função anti-simétrica.

Exercício 19

Mostre que existe uma correspondência bijectiva entre vectores reais harmónicos no tempo e vectores complexos. Analise a polarização de um vector complexo. Explique como poderia obter os eixos principais da elipse que, no caso geral, representa geometricamente um dado vector complexo.

Resolução

Um vector real, harmónico no tempo, é um vector $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^3$ função do tempo $t \in]-\infty, \infty[$ que satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{A} = 0.$$

A solução geral desta equação pode ser escrita na forma

$$\text{vector real} \rightarrow \boxed{\mathbf{A}(t) = \mathbf{a}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{a}_2 \sin(\omega t)}$$

em que $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$ são vectores reais e constantes. Note-se que se pode definir o período T deste movimento harmónico como sendo ($f = 1/T$ é a frequência, com $\omega = 2\pi f$)

$$\text{período} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

já que $\mathbf{A}(t-T) = \mathbf{A}(t)$. Ao vector real e variável no tempo $\mathbf{A}(t)$ corresponde um único vector complexo $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^3$ constante se se fizer

$$\boxed{\mathbf{A}(t) = \Re \left\{ \mathbf{a} e^{-i\omega t} \right\}}$$

com

$$\text{vector complexo} \rightarrow \boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i \mathbf{a}_2}$$

em que $\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}(0)$ e $\mathbf{a}_2 = \mathbf{A}(T/4)$. Introduzindo, então, os vectores

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1 \lrcorner (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1^2 \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{c}_2 = \mathbf{a}_2 \lrcorner (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2^2 \mathbf{a}_1 \end{cases}$$

infere-se que

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{A}(t) = -(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^2 \sin(\omega t) \\ \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{A}(t) = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^2 \cos(\omega t) \end{cases}$$

donde se tira que

$$\text{elipse} \rightarrow \boxed{[\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{A}(t)]^2 + [\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{A}(t)]^2 = (\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2)^4}.$$

Esta é a equação de uma *elipse* que se encontra sobre o plano correspondente ao bivector $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$.

Conclusão: Enquanto que o vector real $\mathbf{A}(t)$ se representa por uma seta, o vector complexo \mathbf{a} deve representar-se, no caso geral, por uma elipse orientada (i.e., onde se definiu um sentido de percurso). O sentido de rotação, sobre a elipse, corresponde à orientação do bivector $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$.

Comentário: A elipse do vector complexo \mathbf{a} corresponde à *polarização* do vector real $\mathbf{A}(t)$ que evolui, ao longo do tempo, no plano do bivector $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$. Em termos da álgebra geométrica (de Clifford) podemos dizer que $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^3 \subset Cl_3$, enquanto que $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^3 \subset \mathbb{C} \otimes Cl_3$ (sendo, esta última, a *complexificação* da álgebra Cl_3).

Obviamente que existem, basicamente, dois tipos de polarização: (i) PL (polarização linear), que corresponde a ter-se $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = 0$; (ii) PE (polarização elíptica), que corresponde a ter-se $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \neq 0$. Note-se que a PL corresponde a uma das seguintes situações: (i) $\mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2$; (ii) $\mathbf{a}_1 = 0$ ou $\mathbf{a}_2 = 0$. O caso especial da PC (polarização circular) corresponde a um caso particular da PE. Com efeito, na PC deve ser constante $|\mathbf{A}(t)|$, i.e., $\frac{d}{dt} |\mathbf{A}(t)|^2 = 0$.

Mas então, como se tem

$$|\mathbf{A}(t)|^2 = \mathbf{a}_2^2 + (\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2) \cos(2\omega t) + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \sin(2\omega t),$$

infere-se que

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{A}(t)|^2 = 0 \Rightarrow (\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2) \sin(2\omega t) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \cos(2\omega t).$$

Logo, fazendo $t = 0$, obtém-se $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$. Por outro lado, como $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$, infere-se que $\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2 = 0$, ou seja, $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2|$.

Polarização	Condição
PL	$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = 0$
PE	$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \neq 0$
PC	$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0, \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 $

Exemplos: Os vectores complexos

$$\left| \begin{array}{l} \text{PCD} \rightarrow \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2) \in \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbf{R}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{e}_2 \sin(\omega t)] \in \mathbb{R}^2 \\ \text{PCE} \rightarrow \hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) \in \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbf{L}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mathbf{e}_1 \cos(\omega t) - \mathbf{e}_2 \sin(\omega t)] \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

correspondem, respectivamente, a uma PCD (polarização circular direita) e a uma PCE (polarização circular esquerda) para propagação ao longo de $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. Fez-se, como é óbvio,

$$\mathbf{R}(t) = \Re \{ \hat{\mathbf{R}} e^{-i\omega t} \}, \quad \mathbf{L}(t) = \Re \{ \hat{\mathbf{L}} e^{-i\omega t} \}.$$

Note-se que $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}}^* = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}}^* = 1$ e $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{L}}^* = \hat{\mathbf{R}}^* \cdot \hat{\mathbf{L}} = 0$ mas que $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = 0$ e $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{L}} = 1$. Os vectores complexos $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\mathbf{L}}$ são unitários no sentido em que $|\hat{\mathbf{R}}|^2 = \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}}^* = 1$ e $|\hat{\mathbf{L}}|^2 = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}}^* = 1$.

Podemos, agora, definir um novo vector complexo $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^3$ tal que

$$\boxed{\mathbf{b} = e^{-i\theta} \mathbf{a}}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2 = (\cos \theta - i \sin \theta)(\mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}.$$

Note-se, para já, que o vector real correspondente será

$$\mathbf{B}(t) = \Re \{ \mathbf{b} e^{-i\omega t} \}$$

$$\therefore \mathbf{B}(t) = \mathbf{b}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{b}_2 \sin(\omega t).$$

Porém, a elipse correspondente ao vector \mathbf{b} complexo é a mesma que a do vector \mathbf{a} complexo. Com efeito,

$$\mathbf{B}(t) = \Re \{ \mathbf{b} e^{-i\omega t} \} = \Re \{ \mathbf{a} e^{-i\theta} e^{-i\omega t} \} = \mathbf{a}_1 \cos(\omega t + \theta) + \mathbf{a}_2 \sin(\omega t + \theta).$$

Portanto, como

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{A} \left(t + \frac{\theta}{\omega} \right),$$

apenas a fase na origem do tempo sofre uma alteração: nem a forma da elipse nem o seu sentido de rotação são alterados. Podemos, agora, determinar o ângulo θ para o qual se tem $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$, i.e., em que $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$, de forma a que \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 correspondam aos *eixos principais* da elipse – obtendo-se, assim, a sua *representação axial*. Mas

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = \cos(2\theta)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) - \frac{1}{2} \sin(2\theta)(\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2).$$

Logo

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\tan(2\theta) = \frac{2(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)}{\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2}}.$$

No caso particular em que $\mathbf{a}_1^2 = \mathbf{a}_2^2$, é apenas $2\theta = \pi/2$ ou seja $\theta = \pi/4$, vindo então

$$|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \\ \mathbf{b}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \end{cases}.$$

Se acontecer que $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$, é $\theta = 0$ (i.e., $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ e $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2$). Assim, no caso geral, fixados os vectores reais

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_2 = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$$

basta calcular o ângulo θ tal que

$$\tan(2\theta) = \frac{2(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)}.$$

Os vectores procurados serão então

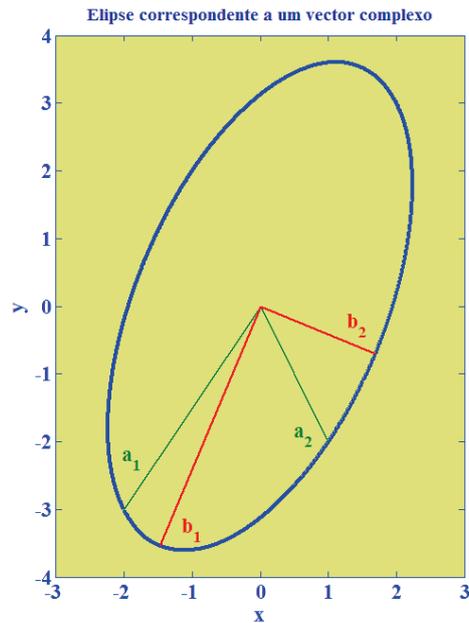
$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \bar{x}_1 \mathbf{e}_1 + \bar{y}_1 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b}_2 = \bar{x}_2 \mathbf{e}_1 + \bar{y}_2 \mathbf{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 = (\bar{x}_1 \bar{y}_2 - \bar{x}_2 \bar{y}_1)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$$

com

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ \bar{y}_1 = y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta \\ \bar{x}_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ \bar{y}_2 = -y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_1 \bar{y}_2 - \bar{x}_2 \bar{y}_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

de modo que se tem

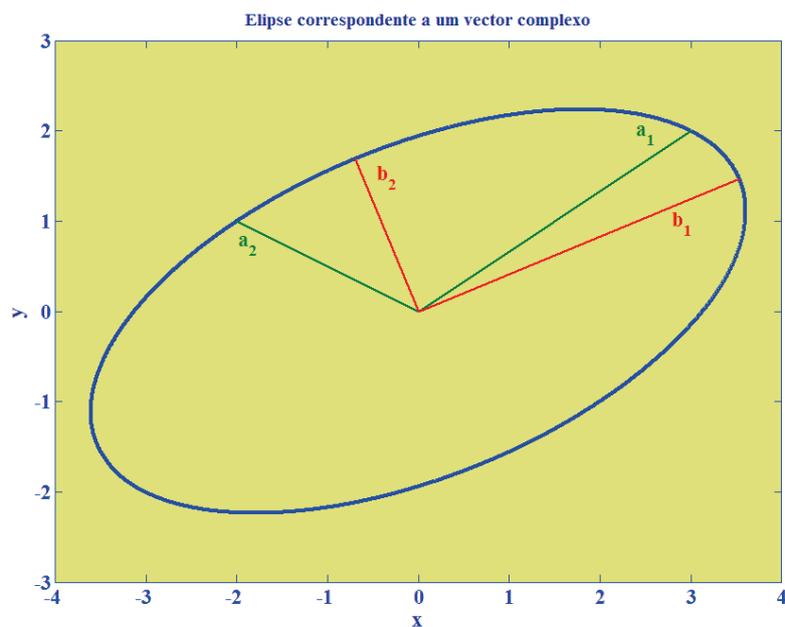
$$\text{bivector da elipse} \rightarrow \boxed{\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}.$$



Nas duas figuras anexas representam-se, respectivamente, as duas elipses correspondentes aos vectores complexos $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$ para os seguintes valores:

$$(1) \rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 = -2 \\ y_1 = -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 = +1 \\ y_2 = -2 \end{pmatrix};$$

$$(2) \rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 = +3 \\ y_1 = +2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 = -2 \\ y_2 = +1 \end{pmatrix}.$$



Atendendo a que

$$\mathbf{b} = e^{-i\theta} \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}^* = e^{i\theta} \mathbf{a}^*$$

vem $\mathbf{b}\mathbf{b}^* = \mathbf{a}\mathbf{a}^*$, tendo-se ainda

$$\begin{cases} \mathbf{a}\mathbf{a}^* = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* + \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}^* \\ \mathbf{b}\mathbf{b}^* = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^* + \mathbf{b} \wedge \mathbf{b}^* \end{cases}$$

Porém, notando que

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* = |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 & \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}^* = -2i(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^* = |\mathbf{b}|^2 = \mathbf{b}_1^2 + \mathbf{b}_2^2 & \mathbf{b} \wedge \mathbf{b}^* = -2i(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2) \end{cases}$$

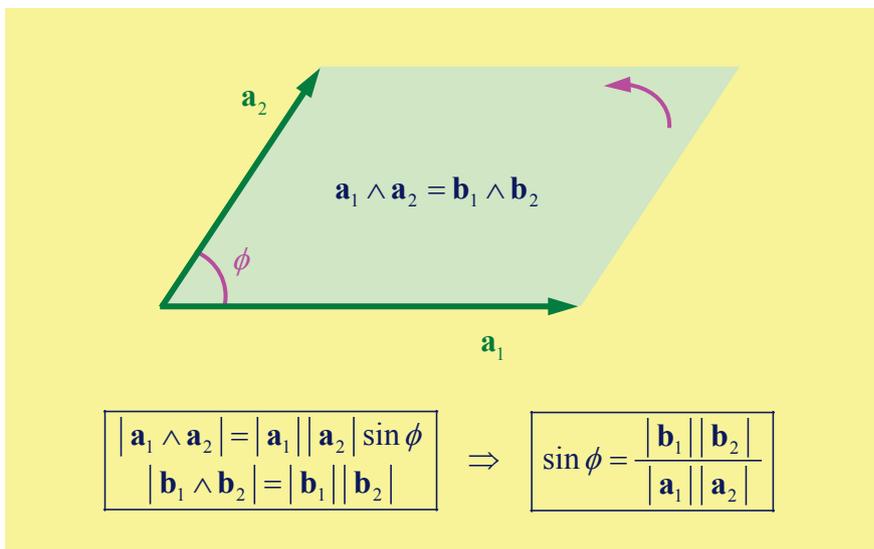
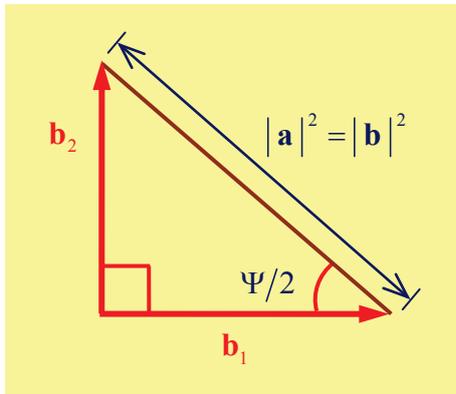
infere-se que

$$\begin{cases} \Re \{ \mathbf{a}\mathbf{a}^* \} = |\mathbf{a}|^2 & \Re \{ \mathbf{b}\mathbf{b}^* \} = |\mathbf{b}|^2 \\ \Im \{ \mathbf{a}\mathbf{a}^* \} = -2(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2) & \Im \{ \mathbf{b}\mathbf{b}^* \} = -2(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2) \end{cases}$$

Mas então, como $\mathbf{b}\mathbf{b}^* = \mathbf{a}\mathbf{a}^*$, vem

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2 = \mathbf{b}_1^2 + \mathbf{b}_2^2, \quad \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2.$$

Nas duas figuras anexas apresenta-se uma interpretação geométrica destas relações.



Analogamente, vem

$$\begin{cases} \mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2) + 2i(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) \\ \mathbf{b}^2 = \mathbf{b} \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2 \end{cases}$$

Mas como, por outro lado, se tem

$$\mathbf{b}^2 = e^{-2i\theta} \mathbf{a}^2$$

tira-se que

$$|\mathbf{b}^2| = |\mathbf{a}^2| = |\mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2|.$$

No caso da PC é $|\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}_2|$ e, portanto,

$$\text{PC} \rightarrow \mathbf{b}^2 = |\mathbf{b}^2| = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}^2| = 0$$

embora se tenha

$$\text{PC} \rightarrow |\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2 = 2\mathbf{a}_1^2 > 0.$$

Polarização	Condição
PL	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}^* = 0$
PE	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}^* \neq 0$
PC	$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$

É possível definir a *polarização* de um vector complexo \mathbf{a} através de um vector real \mathbf{p} ortogonal ao plano do bivector $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$ e tal que

$$\text{polarização} \rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{a}) = i \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^*} = 2 \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{a}^*) = -\mathbf{p}(\mathbf{a}).$$

O vector complexo conjugado $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}_1 - i\mathbf{a}_2$ corresponde à mesma elipse de $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2$ mas com sentido de rotação contrário – daí que $\mathbf{p}(\mathbf{a}^*) = -\mathbf{p}(\mathbf{a})$. Note-se que: (i) na PL é $\mathbf{p}(\mathbf{a}) = 0$; (ii) na PC é $|\mathbf{p}(\mathbf{a})| = 1$. Fazendo, por definição,

$$p(\mathbf{a}) = |\mathbf{p}(\mathbf{a})| \Rightarrow 0 \leq p(\mathbf{a}) \leq 1.$$

Polarização	Condição
PL	$p(\mathbf{a}) = e(\mathbf{a}) = 0$
PE	$p(\mathbf{a}) \leq 1, e(\mathbf{a}) \leq 1$
PC	$p(\mathbf{a}) = e(\mathbf{a}) = 1$

Note-se que, sendo Ψ qualquer ângulo do quadrilátero cujas diagonais são os dois eixos principais da elipse, vem sucessivamente

$$\tan\left(\frac{\Psi}{2}\right) = \frac{|\mathbf{b}_2|}{|\mathbf{b}_1|}$$

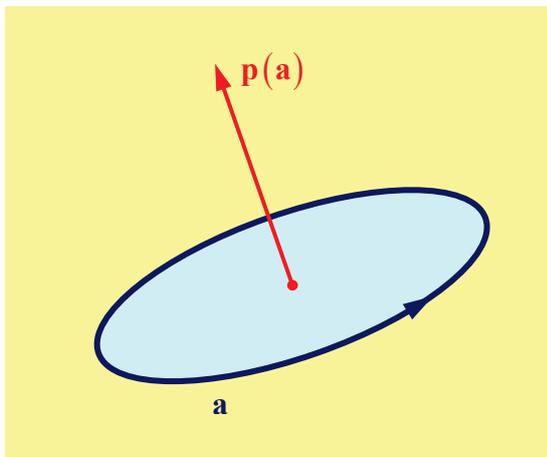
$$p(\mathbf{a}) = p(\mathbf{b}) = 2 \frac{|\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2|}{|\mathbf{b}_1|^2 + |\mathbf{b}_2|^2} \Rightarrow p(\mathbf{a}) = p(\mathbf{b}) = 2 \frac{|\mathbf{b}_1| |\mathbf{b}_2|}{|\mathbf{b}_1|^2 + |\mathbf{b}_2|^2} = 2 \frac{|\mathbf{b}_2|/|\mathbf{b}_1|}{1 + |\mathbf{b}_2|^2/|\mathbf{b}_1|^2}$$

$$\therefore p(\mathbf{a}) = \frac{2 \tan(\Psi/2)}{1 + \tan^2(\Psi/2)} \Rightarrow \boxed{p(\mathbf{a}) = \sin \Psi}$$

A área da elipse é dada por \mathcal{A} , com

$$\mathcal{A} = \pi |\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2| = \pi |\mathbf{b}_1| |\mathbf{b}_2| = \frac{\pi}{2} p(\mathbf{a}) |\mathbf{a}|^2 \Rightarrow \boxed{p(\mathbf{a}) = \frac{2\mathcal{A}}{\pi |\mathbf{a}|^2}}$$

Na figura anexa mostra-se a relação entre a elipse (orientada) do vector (complexo) \mathbf{a} e o seu correspondente vector (real) de polarização $\mathbf{p}(\mathbf{a})$.



Exemplos: Consideremos, novamente, os dois exemplos já anteriormente considerados

$$\text{PCD} \rightarrow \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)$$

$$\text{PCE} \rightarrow \hat{\mathbf{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2)$$

Nestes dois casos, vem então (como $\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}}^* = \hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{L}}^* = 1$)

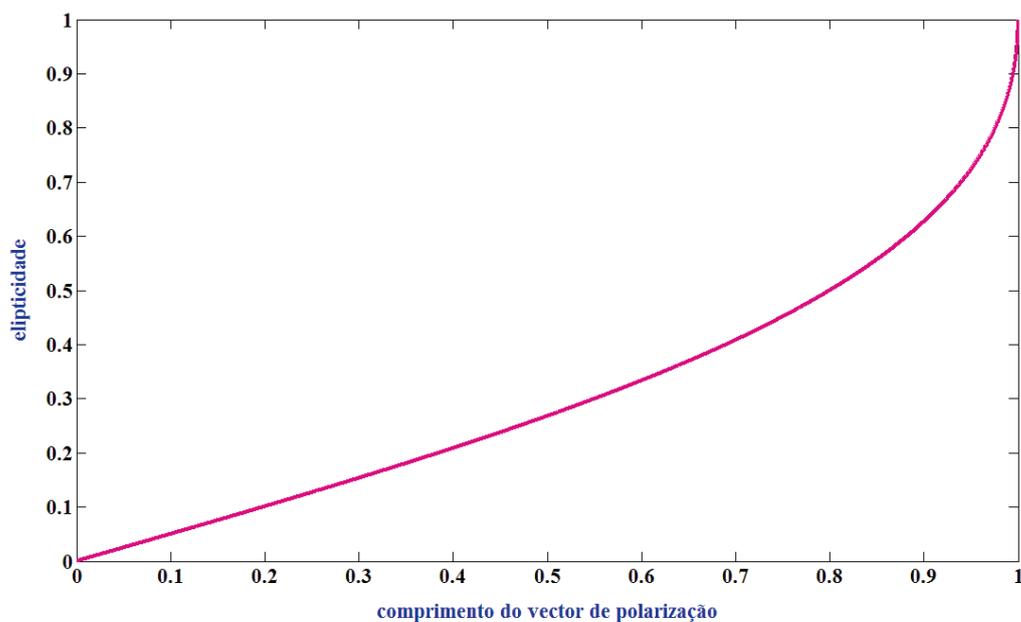
$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{R}}^* = -i\mathbf{e}_3 & \rightarrow \mathbf{p}(\hat{\mathbf{R}}) = \mathbf{e}_3 \\ \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}}^* = i\mathbf{e}_3 & \rightarrow \mathbf{p}(\hat{\mathbf{L}}) = -\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Define-se, por fim, a *elipticidade* $e(\mathbf{a})$ da elipse (i.e., o quociente entre o eixo menor e o eixo maior) tal que (com $0 \leq e(\mathbf{a}) \leq 1$)

$$p(\mathbf{a}) = \frac{2e(\mathbf{a})}{1+e^2(\mathbf{a})} = \sin \Psi \Rightarrow \boxed{e(\mathbf{a}) = \frac{1 - \sqrt{1 - p^2(\mathbf{a})}}{p(\mathbf{a})}}$$

$$\therefore e(\mathbf{a}) = \frac{\cos(\Psi/2)}{1 + \sin(\Psi/2)} = \tan\left(\frac{\pi - \Psi}{4}\right).$$

Na figura anexa representa-se a elipticidade e em função de p .



Os vectores reais e ortogonais $\mathbf{b}_1 = \Re\{\mathbf{b}\}$ e $\mathbf{b}_2 = \Im\{\mathbf{b}\}$ também se podem obter através da seguinte forma alternativa:

$$\mathbf{b} = \left| \sqrt{\mathbf{a}^2} \right| \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}}$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{b}_1 = \left| \sqrt{\mathbf{a}^2} \right| \Re \left\{ \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}} \right\} \\ \mathbf{b}_2 = \left| \sqrt{\mathbf{a}^2} \right| \Im \left\{ \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}} \right\} \end{cases}.$$

Com efeito, tal como se viu anteriormente, é

$$\mathbf{b}^2 = e^{-2i\theta} \mathbf{a}^2$$

$$(\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2) + 2i(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = e^{2i\theta} (\mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2)$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2 = (\mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2) \cos(2\theta) \\ 2(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = (\mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2) \sin(2\theta) \end{cases} \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{2(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)}{\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2}$$

pelo que

$$\sqrt{\mathbf{a}^2} = e^{i\theta} \sqrt{\mathbf{b}^2} = e^{i\theta} \sqrt{\mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2} = z = |z| e^{i\theta} \in \mathbb{C} \quad \therefore \frac{\left| \sqrt{\mathbf{a}^2} \right|}{\sqrt{\mathbf{a}^2}} = \frac{|z|}{z} = e^{-i\theta}$$

provando-se, deste modo, que – de acordo com a expressão apresentada – também \mathbf{b} e \mathbf{a} correspondem à mesma elipse orientada. Por outro lado, como se tem

$$\mathbf{b}^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \left| \sqrt{\mathbf{a}^2} \right|^2 = \left| \mathbf{a}^2 \right| > 0$$

isto significa que, efectivamente, vem

$$\mathbf{b}^2 = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2)(\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2) + i(\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_2\mathbf{b}_1) = (\mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2) + 2i(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2) \in \mathbb{C}$$

$$\therefore \mathbf{b}^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0}$$

tal como deveria acontecer para os eixos principais da elipse, i.e., $\mathbf{b}_1 \perp \mathbf{b}_2$.

Nota: Uma outra forma de calcular o ângulo $\phi = \angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ é a seguinte:

$$\therefore \tan(2\theta) = \frac{2(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)}{\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2} \Rightarrow \boxed{\cos \phi = \frac{\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2}{2|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|} \tan(2\theta)}.$$

Comentário importante: Este processo de calcular o vector complexo $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$ a partir do vector complexo $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2$ garante duas coisas: (i) que $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$; (ii) que $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}_1^2 - \mathbf{b}_2^2 = |\mathbf{a}^2| > 0$, i.e., que se tem $|\mathbf{b}_1| > |\mathbf{b}_2|$. Deste modo podemos afirmar que

$$|\mathbf{b}_1| > |\mathbf{b}_2| \rightarrow \begin{cases} \text{semi-eixo maior da elipse} \rightarrow |\mathbf{b}_1| = \left| \sqrt{\mathbf{a}^2} \right| \left| \Re \left\{ \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}} \right\} \right| \\ \text{semi-eixo menor da elipse} \rightarrow |\mathbf{b}_2| = \left| \sqrt{\mathbf{a}^2} \right| \left| \Im \left\{ \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}} \right\} \right| \end{cases}$$

Exercício 20

Nem todos os vectores complexos correspondem, fisicamente, a vectores reais harmónicos no tempo. É o caso, e.g., do vector de onda \mathbf{k} para uma onda plana não uniforme a propagar-se no ar. Analise esta situação e indique uma situação que dê origem a este tipo de onda.

Resolução

Como estamos a considerar propagação no ar deve ter-se

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k_0^2, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

em que

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2 \in \mathbb{C}^3.$$

Assim, vem

$$(\mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2)^2 = (\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2) + i(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_2\mathbf{k}_1) = (\mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2) + 2i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) = k_0^2$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2 = k_0^2 \\ \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = 0 \end{cases}$$

o que significa que os vectores \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 são ortogonais (os planos de fase constante são ortogonais aos planos de amplitude constante) e, ainda, que $|\mathbf{k}_1| > |\mathbf{k}_2|$. Podemos, portanto, escrever $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\phi)$ na forma paramétrica $\mathbf{k} = (\hat{\mathbf{k}}_1 \cosh \phi + i \hat{\mathbf{k}}_2 \sinh \phi) k_0$. Para uma onda plana e monocromática, vem

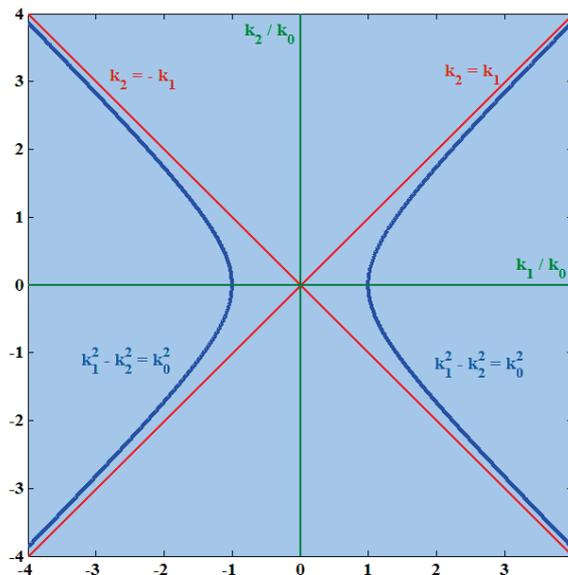
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \right\}, \quad \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \exp(-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})$$

$$\left| \begin{array}{l} k_1 = |\mathbf{k}_1| = k_0 \cosh \phi \\ k_2 = |\mathbf{k}_2| = k_0 \sinh \phi \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{k}_1 = k_1 \hat{\mathbf{k}}_1 \\ \mathbf{k}_2 = k_2 \hat{\mathbf{k}}_2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \mathbf{r} = \zeta = r \cos \theta \\ \hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{r} = \xi = r \sin \theta \end{array} \right.$$

$$\exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(i k_1 \zeta) \exp(-k_2 \xi) = \exp(i k_1 \cos \theta r) \exp(-k_2 \sin \theta r)$$

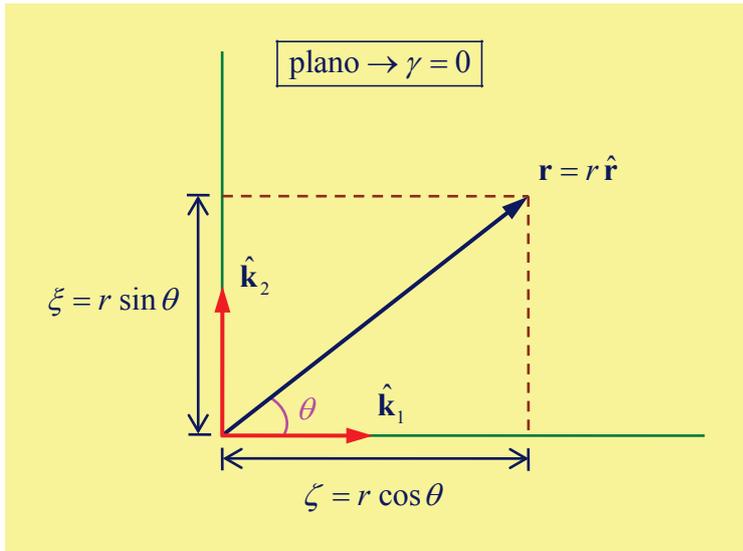
$$\therefore \left| \begin{array}{l} \beta = k_1 \cos \theta = k_0 \cosh \phi \cos \theta \\ \alpha = k_2 \sin \theta = k_0 \sinh \phi \sin \theta \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(i \beta r) \exp(-\alpha r)}.$$

A equação $k_1^2 - k_2^2 = k_0^2$ é a equação de uma hipérbole – tal como se indica na figura anexa. A direcção longitudinal de propagação é o eixo ζ com uma constante de propagação longitudinal $k_1 = k_0 \cosh \phi$. O eixo ξ , ortogonal a ζ , é a direcção de atenuação transversal $k_2 = k_0 \sinh \phi$. Ao longo da direcção $\hat{\mathbf{r}}$ de observação, a constante de propagação é β e a constante de atenuação é α .

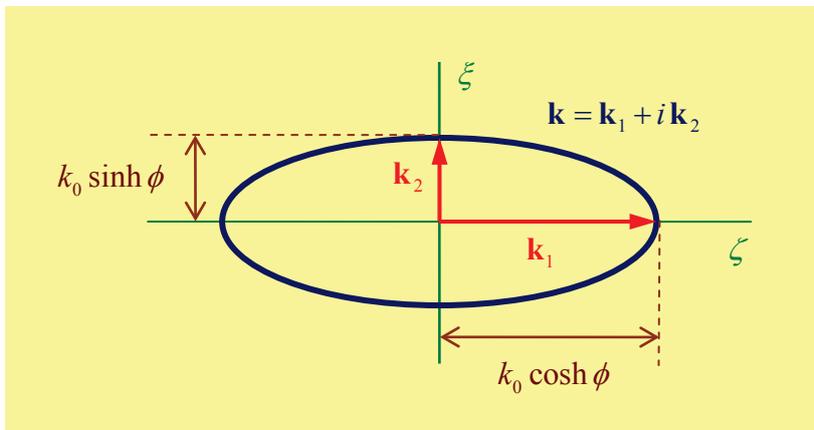


Os planos de fase constante, que são paralelos ao bivector $\mathbf{F}_1 = \hat{\mathbf{k}}_1 \mathbf{e}_{123}$, e os planos de amplitude constante, que são paralelos ao bivector $\mathbf{F}_2 = \hat{\mathbf{k}}_2 \mathbf{e}_{123}$, são mutuamente ortogonais (ver figura anexa). Note-se que a direcção da velocidade de fase é $\hat{\mathbf{k}}_1$, tendo-se

$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k_1} \hat{\mathbf{k}}_1 = \frac{\omega}{k_0 \cosh \phi} \hat{\mathbf{k}}_1 = \frac{c}{\cosh \phi} \hat{\mathbf{k}}_1.$$



Apesar de ao vector complexo \mathbf{k} não corresponder qualquer grandeza real harmónica no tempo podemos representar este vector por uma elipse. O semi-eixo maior desta elipse é $k_1 = k_0 \cosh \phi$ (a constante de propagação longitudinal) e o semi-eixo menor é $k_2 = k_0 \sinh \phi$ (a constante de atenuação transversal) – tal como se indica na figura anexa.



A anterior decomposição só é possível quando o vector \mathbf{r} se encontra no plano do bivector $\hat{\mathbf{k}}_1 \wedge \hat{\mathbf{k}}_2$. Em geral, porém, deve escrever-se (em coordenadas esféricas)

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \gamma (\cos \theta \hat{\mathbf{k}}_1 + \sin \theta \hat{\mathbf{k}}_2) + \sin \gamma (\hat{\mathbf{k}}_1 \times \hat{\mathbf{k}}_2)$$

$$\begin{cases} \zeta = r \cos \theta \\ \xi = r \sin \theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \mathbf{r} = \zeta \cos \gamma = r \cos \gamma \cos \theta \\ \hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{r} = \xi \cos \gamma = r \cos \gamma \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) &= \exp(i k_1 \cos \gamma \zeta) \exp(-k_2 \cos \gamma \xi) \\ &= \exp(i k_1 \cos \gamma \cos \theta r) \exp(-k_2 \cos \gamma \sin \theta r) \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \beta = k_1 \cos \gamma \cos \theta = k_0 \cosh \phi \cos \gamma \cos \theta \\ \alpha = k_2 \cos \gamma \sin \theta = k_0 \sinh \phi \cos \gamma \sin \theta \end{cases} \rightarrow \boxed{\exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(i \beta r) \exp(-\alpha r)}.$$

Assim, quando $\gamma = 0$, recupera-se a situação já analisada. Porém, quando $\gamma = \pi/2$, é $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{k}}_1 \times \hat{\mathbf{k}}_2$ e, conseqüentemente, $\beta = \alpha = 0$: a onda plana não uniforme comporta-se, nesta direcção ortogonal ao bivector $\hat{\mathbf{k}}_1 \wedge \hat{\mathbf{k}}_2$, como uma onda de amplitude constante e, simultaneamente, de fase (também) constante.

Uma onda não uniforme pode ocorrer numa situação de reflexão interna total numa interface plana entre dois meios dieléctricos sem perdas: um meio 1, de índice refacção n_1 , e um meio 2, de índice de refacção n_2 (com $n_1 > n_2$). A lei de Snell mostra que

$$\boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2}.$$

Então, a reflexão interna total ocorre para $\theta_1 \geq \theta_c$, em que o ângulo crítico θ_c é tal que

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} < 1.$$

Para $\theta_1 \geq \theta_c$ a lei de Snell revela que $\theta_1 \in \mathbb{C}$, com

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - i\phi, \quad \phi > 0.$$

Com efeito, vem sucessivamente

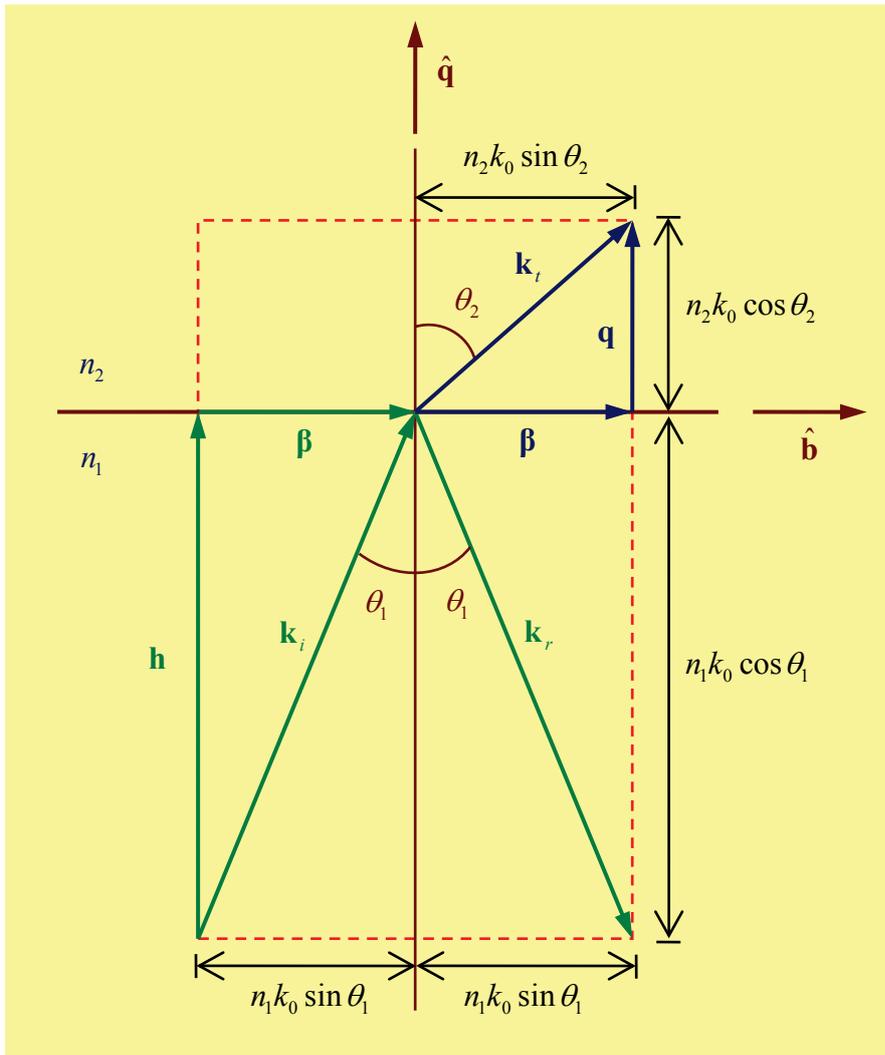
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - i\phi \right) = n_2 \cos(i\phi) = n_2 \cosh \phi \geq n_2$$

sendo $\phi = 0$ apenas quando $\theta_1 = \theta_c$. Note-se ainda que, no meio 2, a constante de propagação é efectivamente da forma $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2 \in \mathbb{C}$. Tem-se

$$\theta_1 < \theta_c \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\beta} = n_1 k_0 \sin \theta_1 \hat{\mathbf{b}} = n_2 k_0 \sin \theta_2 \hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{h} = n_1 k_0 \cos \theta_1 \hat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} = n_2 k_0 \cos \theta_2 \hat{\mathbf{q}} \end{cases}$$

tal como se ilustra na figura anexa em que

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{k}_i - \mathbf{h} \\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{k}_r + \mathbf{h} \\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{k}_t - \mathbf{q} \end{cases}$$



$$\theta_1 \geq \theta_c \rightarrow \begin{cases} \beta = n_1 k_0 \sin \theta_1 & \hat{\mathbf{b}} = n_2 k_0 \sin \theta_2 & \hat{\mathbf{b}} = n_2 k_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} - i\phi \right) & \hat{\mathbf{b}} = n_2 k_0 \cosh \phi \hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{h} = n_1 k_0 \cos \theta_1 \hat{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} = n_2 k_0 \cos \theta_2 \hat{\mathbf{q}} = n_2 k_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} - i\phi \right) \hat{\mathbf{q}} = n_2 k_0 \sin(i\phi) \hat{\mathbf{q}} = i n_2 k_0 \sinh \phi \hat{\mathbf{q}} \end{cases}$$

Portanto, no meio 2 e para $\theta_1 \geq \theta_c$, é (com $\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{q}} = 0$)

$$\theta_1 \geq \theta_c \rightarrow \mathbf{k}_t = \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2 \rightarrow \begin{cases} \mathbf{k}_1 = n_2 k_0 \cosh \phi \hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{k}_2 = n_2 k_0 \sinh \phi \hat{\mathbf{q}} \end{cases}$$

sendo, ainda,

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_2^2 = n_2^2 k_0^2, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Exercício 21

Usando a definição geométrica de determinante de um operador linear, mostre que

$$\det(\mathbf{f}\mathbf{g}) = \det(\mathbf{f})\det(\mathbf{g}).$$

Considere que $\mathbf{f}, \mathbf{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (i.e., que podemos considerar que tanto \mathbf{f} como \mathbf{g} são endomorfismos da álgebra Cl_3).

Resolução

Seja $\mathbf{h}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{b} = \mathbf{h}(\mathbf{a})$ um operador linear, i.e., tal que

$$\mathbf{h}(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{h}(\mathbf{a}) + \beta \mathbf{h}(\mathbf{b}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Através das duas generalizações seguintes (em que $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$)

$$\left| \begin{array}{l} \text{primeira generalização} \quad \mathbf{h}: \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \rightarrow \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{h}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{h}(\mathbf{a}) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{b}) \\ \text{segunda generalização} \quad \mathbf{h}: \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 \rightarrow \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{h}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{h}(\mathbf{a}) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{b}) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{c}) \end{array} \right.$$

e, admitindo que também se encontra definido o operador em \mathbb{R} tal que $\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \mapsto \beta = \mathbf{f}(\alpha)$, então é possível generalizar \mathbf{h} a um endomorfismo de Cl_3 , i.e., tem-se

$$\mathbf{h}: Cl_3 \rightarrow Cl_3 : u \mapsto v = \mathbf{h}(u).$$

Notando que o elemento (ou multivector) genérico de Cl_3 tem a forma

$$u = \alpha + \mathbf{a} + \beta \mathbf{e}_{123} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 = Cl_3$$

podemos então escrever

$$\mathbf{h}(u) = \mathbf{h}(\alpha) + \mathbf{h}(\mathbf{a}) + \mathbf{h}(\beta \mathbf{e}_{123}) + \beta \mathbf{h}(\mathbf{e}_{123}) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^3 = Cl_3.$$

A definição geométrica de determinante (i.e., a definição que não recorre ao cálculo matricial) estabelece que se tem

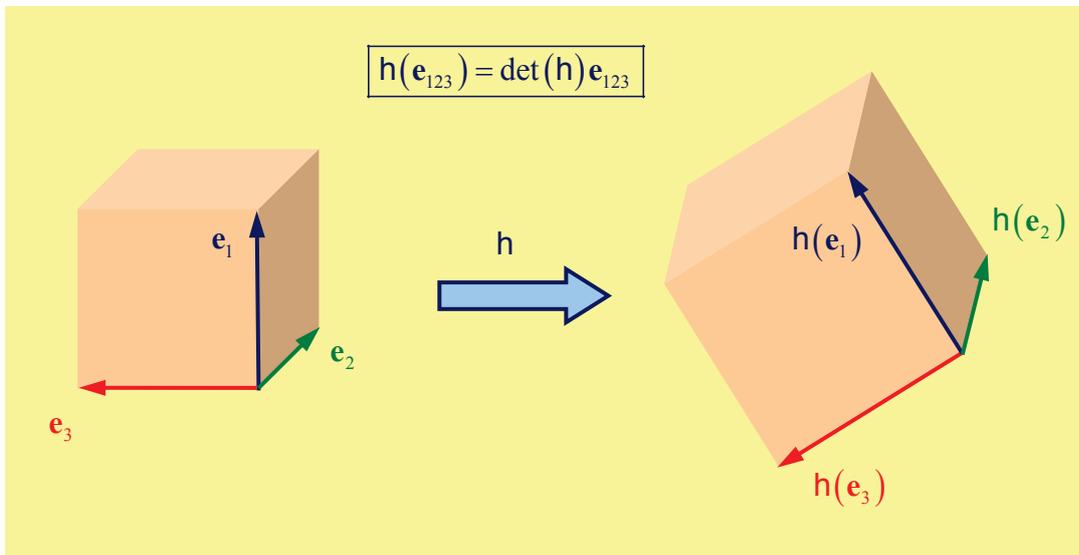
$$\boxed{\text{definição geométrica de determinante}} \rightarrow \boxed{\mathbf{h}(\mathbf{e}_{123}) = \det(\mathbf{h}) \mathbf{e}_{123}}.$$

Note-se que

$$\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \Rightarrow \mathbf{h}(\mathbf{e}_{123}) = \mathbf{h}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{h}(\mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{e}_3)$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{h}(\mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{e}_3) = \det(\mathbf{h}) \mathbf{e}_{123}}$$

o que significa que $\det(\mathbf{h})$ nos diz de que forma o volume elementar orientado \mathbf{e}_{123} se transforma no volume orientado $\mathbf{h}(\mathbf{e}_1) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{h}(\mathbf{e}_3)$.



Vejamos o caso concreto colocado por este exercício. Admitamos que se tem

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}) = (\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{a}) = (\mathbf{f}\mathbf{g})(\mathbf{a}) = \mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{a})].$$

Então

$$\begin{cases} \mathbf{h}(\mathbf{e}_{123}) = \det(\mathbf{h}) \mathbf{e}_{123} \\ \mathbf{h}(\mathbf{e}_{123}) = (\mathbf{f}\mathbf{g})(\mathbf{e}_{123}) = \mathbf{f}[\mathbf{g}(\mathbf{e}_{123})] = \det(\mathbf{g}) \mathbf{f}(\mathbf{e}_{123}) = \det(\mathbf{g}) \det(\mathbf{f}) \mathbf{e}_{123} \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\det(\mathbf{f}\mathbf{g}) = \det(\mathbf{f}) \det(\mathbf{g})}, \text{ Q.E.D.}$$

Note-se que, um resultado desta definição geométrica de determinante, é a definição de função inversa. A função adjunta $\bar{\mathbf{h}}$ da função \mathbf{h} define-se como segue

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{b}) = \mathbf{h}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3.$$

Demonstra-se então que, se $\mathbf{F} \in \wedge^2 \mathbb{R}^3$,

$$\det(\mathbf{h}) \mathbf{F} \mathbf{e}_{123} = \mathbf{h}(\mathbf{e}_{123}) \mathbf{F} = \mathbf{h}[\mathbf{e}_{123} \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{F})].$$

Daqui se infere que, fazendo $\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{e}_{123}$, vem

$$\det(\mathbf{h}) \mathbf{b} = \mathbf{h}[\mathbf{e}_{123} \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{b} \mathbf{e}_{123}^{-1})] \Rightarrow \boxed{\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{e}_{123}}{\det(\mathbf{h})} \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{b} \mathbf{e}_{123}^{-1})}.$$

Desta escrita da função inversa também resulta, imediatamente, que

$$\mathbf{h}(\mathbf{b} \mathbf{e}_{123}) = \det(\mathbf{h}) \bar{\mathbf{h}}^{-1}(\mathbf{b}) \mathbf{e}_{123}.$$

Podemos, então, caracterizar o endomorfismo de Cl_3 como segue.

$$u = \alpha + \mathbf{a} + \beta \mathbf{e}_{123} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3 = Cl_3$$

$$\therefore h(u) = h(\alpha) + h(\mathbf{a}) + \det(h) \bar{h}^{-1}(\mathbf{b}) \mathbf{e}_{123} + \beta \det(h) \mathbf{e}_{123} \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \wedge^3 \mathbb{R}^3 = Cl_3.$$

Exercício 22

Sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ tais que $\mathbf{m}^2 = \mathbf{n}^2 = 1$, calcule o determinante da função

$$f(\mathbf{a}) = \alpha \mathbf{a} + \beta (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{n}.$$

Resolução

Começemos por calcular $f(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$. Vem sucessivamente

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= f(\mathbf{a}) \wedge f(\mathbf{b}) = [\alpha \mathbf{a} + \beta (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{n}] \wedge [\alpha \mathbf{b} + \beta (\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{n}] \\ &= \alpha^2 (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + \alpha \beta (\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{n}) + \alpha \beta (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) (\mathbf{n} \wedge \mathbf{b}) \\ &= \alpha^2 (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + \alpha \beta [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m}) \mathbf{b}] \wedge \mathbf{n} \\ &= \alpha^2 (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) - \alpha \beta [\mathbf{m} \lrcorner (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})] \wedge \mathbf{n} \end{aligned}$$

pelo que, fazendo $\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, se obtém então

$$f(\mathbf{F}) = \alpha^2 \mathbf{F} - \alpha \beta (\mathbf{m} \lrcorner \mathbf{F}) \wedge \mathbf{n}.$$

Tendo em consideração que

$$\mathbf{m} \lrcorner (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m})(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{m})(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{m})(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

obtém-se, de forma análoga, que

$$f(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \alpha^3 (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + \alpha^2 \beta [\mathbf{m} \lrcorner (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})] \wedge \mathbf{n}.$$

Assim, em particular, tem-se

$$f(\mathbf{e}_{123}) = \alpha^2 [\alpha + \beta (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})] \mathbf{e}_{123}$$

uma vez que

$$(\mathbf{m} \lrcorner \mathbf{e}_{123}) \wedge \mathbf{n} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_{123}.$$

Logo, de

$$f(\mathbf{e}_{123}) = \det(f) \mathbf{e}_{123}$$

infere-se finalmente que

$$\boxed{\det(\mathbf{f}) = \alpha^2 [\alpha + \beta(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})]}.$$

Aplicamos este resultado à função dielétrica uniaxial $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{a}) = \epsilon_{\perp} \mathbf{a} + (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c}$ em que $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{c}^2 = 1$. Vem então: $\det(\boldsymbol{\epsilon}) = \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}^2$.

Exercício 23

Um operador em \mathbb{R}^3 (i.e., uma aplicação $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) é simétrico, i.e.,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3.$$

Um tal operador é diagonalizável, i.e., existe uma base ortonormada $\mathcal{B}_s = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{R}^3 constituída pelos respectivos vectores próprios. Prove, neste caso, o teorema de Cayley-Hamilton: para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\boxed{\text{teorema de Cayley-Hamilton}} \rightarrow \boxed{\mathbf{f}^3(\mathbf{a}) - \alpha_2 \mathbf{f}^2(\mathbf{a}) + \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \alpha_0 \mathbf{a} = 0}$$

em que

$$\boxed{\lambda^3 - \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda - \alpha_0 = 0}$$

é o polinómio característico do operador.

Resolução

Comecemos por notar que, para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, se tem

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{a}_2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_3 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3.$$

Por outro lado, é

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}(\mathbf{e}_3) = \lambda_3 \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

em que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são os três valores próprios (não necessariamente distintos) do operador \mathbf{f} .

Em particular, tem-se

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{f}[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{f}(\mathbf{e}_1) = \lambda_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{f}^2(\mathbf{a}_1) = \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{a}_1)] = \lambda_1 \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) = \lambda_1^2 \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{f}^3(\mathbf{a}_1) = \mathbf{f}[\mathbf{f}^2(\mathbf{a}_1)] = \lambda_1^2 \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) = \lambda_1^3 \mathbf{a}_1 \end{array} \right.$$

de forma que o polinómio característico

$$\lambda^3 - \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda - \alpha_0 = 0$$

se converte em

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1 = \mathbf{a}_1^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) \\ \lambda_1^2 = \mathbf{a}_1^{-1} \mathbf{f}^2(\mathbf{a}_1) \Rightarrow \mathbf{a}_1^{-1} \mathbf{f}^3(\mathbf{a}_1) - \alpha_2 \mathbf{a}_1^{-1} \mathbf{f}^2(\mathbf{a}_1) + \alpha_1 \mathbf{a}_1^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) - \alpha_0 = 0 \\ \lambda_1^3 = \mathbf{a}_1^{-1} \mathbf{f}^3(\mathbf{a}_1) \end{array} \right.$$

ou ainda

$$\mathbf{f}^3(\mathbf{a}_1) - \alpha_2 \mathbf{f}^2(\mathbf{a}_1) + \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) - \alpha_0 \mathbf{a}_1 = 0.$$

Assim, tem-se

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{f}^3(\mathbf{a}_1) - \alpha_2 \mathbf{f}^2(\mathbf{a}_1) + \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) - \alpha_0 \mathbf{a}_1 = 0 \\ \mathbf{f}^3(\mathbf{a}_2) - \alpha_2 \mathbf{f}^2(\mathbf{a}_2) + \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{a}_2) - \alpha_0 \mathbf{a}_2 = 0 \\ \mathbf{f}^3(\mathbf{a}_3) - \alpha_2 \mathbf{f}^2(\mathbf{a}_3) + \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{a}_3) - \alpha_0 \mathbf{a}_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Porém, facilmente se verifica que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \mathbf{f}(\mathbf{a}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{a}_2) + \mathbf{f}(\mathbf{a}_3) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) \\ \mathbf{f}^2(\mathbf{a}_1) + \mathbf{f}^2(\mathbf{a}_2) + \mathbf{f}^2(\mathbf{a}_3) = \mathbf{f}^2(\mathbf{a}) \\ \mathbf{f}^3(\mathbf{a}_1) + \mathbf{f}^3(\mathbf{a}_2) + \mathbf{f}^3(\mathbf{a}_3) = \mathbf{f}^3(\mathbf{a}) \end{array} \right.$$

pelo que, finalmente, se obtém

$$\mathbf{f}^3(\mathbf{a}) - \alpha_2 \mathbf{f}^2(\mathbf{a}) + \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \alpha_0 \mathbf{a} = 0, \text{ Q.E.D.}$$

Note-se que se tem

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 - \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}_{\alpha_2} \lambda^2 + \underbrace{(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3)}_{\alpha_1} \lambda - \underbrace{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}_{\alpha_0} = 0$$

em que os invariantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ são dados por

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_0 = \det(\mathbf{f}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ \alpha_1 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \\ \alpha_2 = \text{tr}(\mathbf{f}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{array} \right. .$$

Exercício 24

Em electrostática tem-se $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ pelo que, para regiões sem cargas eléctricas, se obtém a equação de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$. Determine a solução geral desta equação em coordenadas hiperbólicas (u, v, \mathcal{G}) admitindo que o potencial escalar Φ só depende de u , i.e., que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{G}} = 0.$$

Em coordenadas hiperbólicas, as coordenadas cartesianas rectangulares (x, y, z) são dadas por

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \cos \mathcal{G} \\ y = \cosh u \cos v \sin \mathcal{G} \\ z = \sinh u \sin v \end{cases}$$

Resolução

O vector de posição \mathbf{r} em coordenadas curvilíneas (u_1, u_2, u_3) é dado por

$$\mathbf{r} = \underbrace{x^1\mathbf{f}_1 + x^2\mathbf{f}_2 + x^3\mathbf{f}_3}_{\text{coordenadas curvilíneas}} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 = \underbrace{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}_{\text{coordenadas cartesianas}}$$

em que $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 , $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3\}$ é a correspondente base dual (ou recíproca) e $\mathcal{B}_s = \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ a base ortonormada em coordenadas cartesianas rectangulares.

Pretende-se determinar, portanto, a base não holónoma (i.e., ortonormada) correspondente às coordenadas curvilíneas em questão e que designaremos por $\hat{\mathcal{B}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Note-se que

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tal como

$$G_s = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em geral, porém, tem-se

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \cdot \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tal como

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}^1 & \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}^2 & \mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}^3 \\ \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}^1 & \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}^2 & \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}^3 \\ \mathbf{f}^3 \cdot \mathbf{f}^1 & \mathbf{f}^3 \cdot \mathbf{f}^2 & \mathbf{f}^3 \cdot \mathbf{f}^3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com efeito, por definição,

$$\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}^j = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

No caso específico das coordenadas hiperbólicas em que

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \cos \mathcal{G} \\ y = \cosh u \cos v \sin \mathcal{G} \\ z = \sinh u \sin v \end{cases}$$

tem-se

$$\mathbf{r} = \cosh u \cos v (\cos \mathcal{G} \mathbf{e}_x + \sin \mathcal{G} \mathbf{e}_y) + \sinh u \sin v \mathbf{e}_z.$$

Note-se que o plano $\mathcal{G} = 0$ corresponde ao plano $y = 0$. Neste plano as curvas $u = \text{constante}$ são tais que

$$\boxed{\mathcal{G} = 0} \rightarrow \begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ z = \sinh u \sin v \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{\cosh^2 u} + \frac{z^2}{\sinh^2 u} = 1} \leftarrow \boxed{u = \text{constante}}$$

e correspondem, portanto, a elipses. As curvas $v = \text{constante}$, por sua vez, são tais que

$$\boxed{\mathcal{G} = 0} \rightarrow \begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ z = \sinh u \sin v \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{\cosh^2 v} - \frac{z^2}{\sinh^2 v} = 1} \leftarrow \boxed{v = \text{constante}}$$

e correspondem, portanto, a hipérbóles.

Nestas condições, a base não holónoma $\hat{\mathcal{B}} = \{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_g\}$ é então constituída pelos vectores

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u} \mathbf{f}_u, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v} \mathbf{f}_v, \quad \mathbf{e}_g = \frac{1}{h_g} \mathbf{f}_g.$$

Tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{f}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \sinh u \cos v (\cos \mathcal{G} \mathbf{e}_x + \sin \mathcal{G} \mathbf{e}_y) + \cosh u \sin v \mathbf{e}_z \\ \mathbf{f}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -\cosh u \sin v (\cos \mathcal{G} \mathbf{e}_x + \sin \mathcal{G} \mathbf{e}_y) + \sinh u \cos v \mathbf{e}_z \\ \mathbf{f}_g = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathcal{G}} = \cosh u \cos v (-\sin \mathcal{G} \mathbf{e}_x + \cos \mathcal{G} \mathbf{e}_y) \end{cases}$$

Facilmente se verifica que se trata de um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais, pois

$$\begin{cases} \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{f}_v = 0 \\ \mathbf{f}_u \cdot \mathbf{f}_g = 0 \\ \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{f}_g = 0 \end{cases}$$

Os coeficientes métricos são dados por

$$\begin{cases} h_u = |\mathbf{f}_u| = \sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} = \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \\ h_v = |\mathbf{f}_v| = \sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v} = \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \\ h_g = |\mathbf{f}_g| = \cosh u \cos v \end{cases}$$

de modo que o laplaciano assume a forma

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{h_u h_v h_g} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_g}{h_u} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right] = \frac{1}{\cosh u \cos v (\cosh^2 u - \cos^2 v)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\cosh u \cos v \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right]$$

uma vez que se admite, por hipótese, que o potencial escalar Φ só depende da variável u .

Inferese daqui que a equação de Laplace para o potencial electrostático será portanto

$$\nabla^2 \Phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \left(\cosh u \cos v \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) = 0$$

donde se tira que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{k_1}{\cosh u} = \frac{2k_1}{e^u + e^{-u}} = \frac{2k_1 e^u}{e^{2u} + 1}$$

$$d\Phi = k_2 \frac{e^u}{(e^u)^2 + 1} du$$

$$\therefore \boxed{\Phi(u) = A \tan^{-1}(e^u) + B}$$

Esta é, portanto, a função potencial escalar mais geral que – em coordenadas hiperbólicas – é possível encontrar, desde que se admita que esta função depende exclusivamente da coordenada u .

Exercício 25

A impermeabilidade dielétrica de um meio anisotrópico não-magnético uniaxial é caracterizada pela função

$$\eta(\mathbf{a}) = \frac{1}{n_o^2} \mathbf{a} + \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c}$$

em que $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{c}^2 = 1$. Admita que, num sistema de coordenadas esféricas, o eixo óptico do cristal é dado por

$$\mathbf{c} = \sin \theta (\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y) + \cos \theta \mathbf{e}_z.$$

Determine o correspondente elipsóide de índices.

Resolução

A impermeabilidade dielétrica é a inversa da função dielétrica, i.e., tem-se $\eta = \epsilon^{-1}$. O elipsóide de índices é a representação geométrica da forma quadrática associada à impermeabilidade dielétrica. Seja $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ um ponto qualquer de \mathbb{R}^3 . A forma quadrática $Q(\mathbf{r})$ associada à impermeabilidade dielétrica será então

$$Q(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \eta(\mathbf{r}).$$

Ou seja,

$$\boxed{\text{forma quadrática}} \rightarrow \boxed{Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{n_o^2} \mathbf{r}^2 + \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})^2}.$$

Note-se que, com efeito, se tem

$$Q(\lambda \mathbf{r}) = \lambda^2 Q(\mathbf{r}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) = & \left[\frac{1}{n_o^2} + \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right] x^2 + \left[\frac{1}{n_o^2} + \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \sin^2 \theta \sin^2 \phi \right] y^2 \\ & + \left[\frac{1}{n_o^2} + \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \cos^2 \theta \right] z^2 \\ & + 2 \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \sin \theta [\sin \theta \sin \phi \cos \phi x y + \cos \theta \cos \phi x z + \cos \theta \sin \phi y z] \end{aligned}$$

a que corresponde o elipsóide de índices

$$\boxed{\text{elipsóide de índices}} \rightarrow \boxed{Q(x, y, z) = 1}.$$

No entanto, o sistema de coordenadas (x, y, z) não é o melhor para a escrita deste elipsóide. Basta considerar um novo sistema de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ em que o eixo \bar{z} está alinhado com o eixo óptico para simplificar consideravelmente a equação do elipsóide de índices: está-se, portanto, a escolher para $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ o referencial dos chamados eixos dielétricos principais no qual a forma quadrática é diagonal, i.e.,

$$\boxed{\theta = 0} \rightarrow \boxed{Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{n_o^2} + \frac{\bar{z}^2}{n_e^2} = 1}.$$

Trata-se, portanto, de um elipsóide de revolução cujo eixo de simetria é precisamente o eixo \bar{z} . Ao longo de \bar{z} mede-se o índice extraordinário n_e enquanto que, sobre o plano (\bar{x}, \bar{y}) , se mede o índice ordinário n_o . O caso em que $n_e = n_o$ corresponde ao caso particular de um material isotrópico.

Define-se a impermeabilidade ao longo de uma direcção $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$, com $\mathbf{s}^2 = 1$, como sendo

$$\eta_{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{s}) = \frac{1}{n_o^2} + \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) (\mathbf{c} \cdot \mathbf{s})^2.$$

Definindo $\mathbf{s} = s_x \mathbf{e}_x + s_y \mathbf{e}_y + s_z \mathbf{e}_z$, com $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$, virá então

$$\eta_{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{s}) = \frac{1}{n_o^2} + \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \left[\sin^2 \theta (\cos^2 \phi s_x^2 + \sin^2 \phi s_y^2) + \cos^2 \theta s_z^2 + 2 \sin \theta (\sin \theta \sin \phi \cos \phi s_x s_y + \cos \theta \cos \phi s_x s_z + \cos \theta \sin \phi s_y s_z) \right].$$

Por exemplo, quando $\mathbf{s} = \mathbf{e}_z$ vem

$$\eta_{\mathbf{s}} = \frac{\cos^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_o^2}.$$

Exercício 26

Sejam S e \bar{S} dois referenciais de inércia e

$$X = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

dois acontecimentos, respectivamente, em S e \bar{S} . Admitamos que a relação entre X e \bar{X} é linear e da forma

$$\bar{X} = LX, \quad L \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}).$$

Definindo

$$g = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mostre que, de acordo com os dois postulados de Einstein da relatividade restrita, se tem necessariamente

$$\boxed{L^T g L = g}.$$

Resolução

Comecemos por recordar, aqui, a definição de referencial de inércia. Diz-se que um referencial é de inércia quando uma partícula material continua o seu estado de movimento (incluindo o de repouso) com velocidade constante, desde que nenhuma força externa actue sobre ela. Os dois postulados de Einstein da relatividade restrita são:

- [P1] Todos os referenciais de inércia são equivalentes do ponto de vista da descrição das leis da física (princípio da relatividade).
- [P2] A velocidade da luz (no vácuo) é a mesma em todos os referenciais de inércia (princípio da constância da velocidade da luz).

Assim, de acordo com **P2**, se a luz se propaga na forma de uma onda esférica $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ no referencial S , esta mesma onda é vista, do ponto de vista do referencial \bar{S} , como $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = c^2 \bar{t}^2$. Atendendo às definições do enunciado, podemos então escrever

$$\boxed{\text{P2}} \rightarrow \begin{cases} S & \rightarrow c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 & \rightarrow X^T g X = 0 \\ \bar{S} & \rightarrow c^2 \bar{t}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2 - \bar{z}^2 = 0 & \rightarrow \bar{X}^T g \bar{X} = 0 \end{cases}$$

A relação entre \bar{X} e X é dada por

$$\bar{X} = LX \Rightarrow \bar{X}^T = X^T L^T, \quad L \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}).$$

Assim, vem

$$\bar{X}^T g \bar{X} = 0 \Rightarrow X^T L^T g L X = 0$$

ou, introduzindo a matriz

$$G = L^T g L,$$

podemos ainda reescrever

$$\boxed{\text{P2}} \rightarrow \begin{cases} S \rightarrow c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \rightarrow X^T g X = 0 \\ \bar{S} \rightarrow c^2 \bar{t}^2 - \bar{x}^2 - \bar{y}^2 - \bar{z}^2 = 0 \rightarrow X^T G X = 0 \end{cases}$$

Consideremos, agora, que se tem

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow X^T = (1 \quad u \quad v \quad w)$$

pelo que

$$X^T g X = (1 \quad u \quad v \quad w) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 1 - u^2 - v^2 - w^2 = 0$$

$$\therefore \boxed{u^2 + v^2 + w^2 = 1}.$$

Como a matriz $G = L^T g L$ é simétrica, podemos escrever

$$G = L^T g L = \begin{pmatrix} \alpha & a_x & a_y & a_z \\ a_x & S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ a_y & S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ a_z & S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & S \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix}$$

donde resulta

$$X^T G X = 0 \Rightarrow \alpha + 2a^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + (u \quad v \quad w) S \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0.$$

Porém, esta última equação deve ser equivalente a $X^T g X = 0$, i.e., a $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Ora isto só será possível caso se tenha

$$\begin{cases} a = 0 \\ S = -\alpha I \end{cases} \Rightarrow a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

para que

$$X^T G X = 0 \Rightarrow \alpha [1 - (u^2 + v^2 + w^2)] = 0.$$

Infere-se, portanto, que deverá ser

$$G = L^T g L = \alpha g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Logo, vem sucessivamente

$$L^T g L = \alpha g \Rightarrow L^T g = \alpha g L^{-1} \Rightarrow g^{-1} L^T g = \alpha L^{-1}.$$

Como $g^{-1} = g$, obtém-se ainda

$$L^{-1} = \alpha^{-1} g L^T g.$$

Admitamos, agora, que

$$L = \begin{pmatrix} L^0_0 & L^0_1 & L^0_2 & L^0_3 \\ L^1_0 & L^1_1 & L^1_2 & L^1_3 \\ L^2_0 & L^2_1 & L^2_2 & L^2_3 \\ L^3_0 & L^3_1 & L^3_2 & L^3_3 \end{pmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} M^0_0 & M^0_1 & M^0_2 & M^0_3 \\ M^1_0 & M^1_1 & M^1_2 & M^1_3 \\ M^2_0 & M^2_1 & M^2_2 & M^2_3 \\ M^3_0 & M^3_1 & M^3_2 & M^3_3 \end{pmatrix}.$$

Se se fizer então $L^0_0 = \gamma$, isto significa que

$$x = y = z = 0 \Rightarrow \bar{t} = \gamma t.$$

Porém, se $L^0_0 = \gamma$ então $M^0_0 = \gamma/\alpha$ pois $L^{-1} = \alpha^{-1} g L^T g$. Mas então, como $X = L^{-1} \bar{X}$,

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0 \Rightarrow t = \frac{\gamma}{\alpha} \bar{t}.$$

Porém, pelo postulado **P1**, deverá ter-se

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \gamma \Rightarrow \alpha = 1.$$

Assim, conclui-se que

$$L^{-1} = g L^T g \Rightarrow \boxed{g = L^T g L}, \text{ Q.E.D.}$$

A consequência deste exercício é a seguinte: o grupo de Lorentz é constituído por

$$\boxed{\text{grupo de Lorentz}} \rightarrow \boxed{\text{O}(1,3) = \{L \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}) \mid L^T g L = g\}}.$$

Exercício 27

Considere um bivector $\mathbf{F} \in \wedge^2 \mathbb{R}^{1,3}$. Em $Cl_{1,3}$ nem todos os bivectores são simples como em Cl_3 . Em geral, tem-se

$$\mathbf{F}^2 = \langle \mathbf{F}^2 \rangle_0 + \langle \mathbf{F}^2 \rangle_4 \in \mathbb{R} \oplus \wedge^4 \mathbb{R}^{1,3}.$$

Um bivector simples é aquele para o qual $\langle \mathbf{F}^2 \rangle_4 = 0$, i.e., $\mathbf{F}^2 \in \mathbb{R}$. Existem três tipos de bivectores simples em $Cl_{1,3}$: (i) os bivectores nulos, para os quais $\mathbf{F}^2 = 0$; (ii) os bivectores hiperbólicos, para os quais $\mathbf{F}^2 > 0$; (iii) os bivectores elípticos, para os quais $\mathbf{F}^2 < 0$. Mostre que é sempre possível decompor o bivector \mathbf{F} na forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{F}_1^2 > 0, \quad \mathbf{F}_2^2 < 0.$$

Sugestão: Faça $\left(\frac{\mathbf{F}}{\phi + \psi \mathbf{I}} \right)^2 = 1$ em que $\phi, \psi \in \mathbb{R}$.

Resolução

Façamos

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\phi}{\phi + \psi \mathbf{I}} \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}_2 = \frac{\psi}{\phi + \psi \mathbf{I}} \mathbf{I} \mathbf{F}.$$

Então

$$\mathbf{F}_1^2 = \left(\frac{\phi}{\phi + \psi \mathbf{I}} \right)^2 \mathbf{F}^2 = \left(\frac{\phi}{\phi + \psi \mathbf{I}} \right)^2 (\phi + \psi \mathbf{I})^2 = \phi^2 > 0$$

$$\mathbf{F}_2^2 = \left(\frac{\psi}{\phi + \psi \mathbf{I}} \right)^2 (\mathbf{I} \mathbf{F})^2 = - \left(\frac{\psi}{\phi + \psi \mathbf{I}} \right)^2 \mathbf{F}^2 = - \left(\frac{\psi}{\phi + \psi \mathbf{I}} \right)^2 (\phi + \psi \mathbf{I})^2 = -\psi^2 < 0$$

o que mostra logo que \mathbf{F}_1 é hiperbólico e que \mathbf{F}_2 é elíptico.

Vejamos, agora, uma forma alternativa de calcular \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 . Façamos

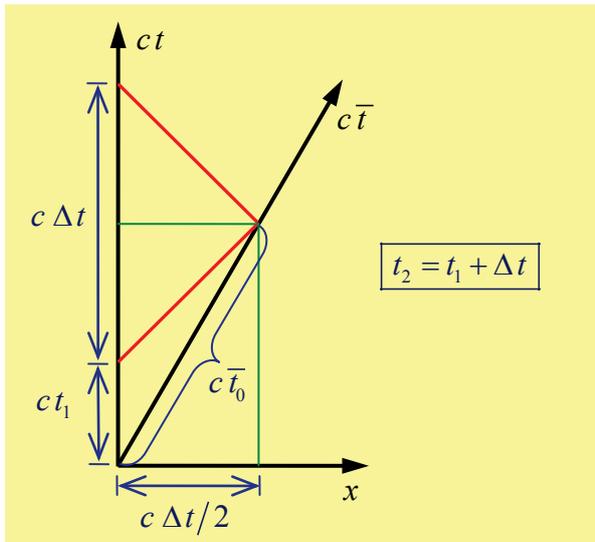
$$\mathbf{F}^2 = (\phi + \psi \mathbf{I})^2 = \alpha + \beta \mathbf{I}.$$

Nestas condições, vem

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{F}}{2\gamma} (\gamma + \alpha - \beta \mathbf{I}) \Rightarrow \mathbf{F}_1^2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 0 \\ \mathbf{F}_2 = \frac{\mathbf{F}}{2\gamma} (\gamma - \alpha + \beta \mathbf{I}) \Rightarrow \mathbf{F}_2^2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 0 \end{array} \right.$$

Exercício 28

Um aluno, que está a fazer um exame escrito, afasta-se do professor com uma velocidade normalizada $\beta = v/c = 0.8$. Quando o aluno passa pelo professor recebe o enunciado. Assim que o professor regista, no seu relógio, que decorreu 1 hora desde o início faz sinal ao aluno para terminar. O aluno acaba o seu exame assim que recebe esse sinal. Quanto tempo teve o aluno para fazer o seu exame?

Resolução

Seja $t_1 = 1\text{h}$ a duração do exame do ponto de vista do professor e \bar{t}_0 essa duração tal como entendida pelo aluno. Não se trata de um problema de simples dilatação do tempo: há que ter em consideração o tempo que o sinal electromagnético (o sinal de acabar) leva a propagar-se desde o início (em t_1) até chegar ao aluno. O sinal electromagnético, se for reflectido de volta para o professor (onde chega em t_2), corresponde num diagrama de

Minkowski a rectas de inclinação a $\pm 45^\circ$ pois correspondem a linhas $x = x_0 \pm ct$, tal como se indica na figura anexa. Assim

$$c \frac{\Delta t}{2} = v \left(t_1 + \frac{\Delta t}{2} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta t}{2} = \frac{\beta}{1-\beta} t_1}$$

$$c \left(t_1 + \frac{\Delta t}{2} \right) \mathbf{e}_0 + c \frac{\Delta t}{2} \mathbf{e}_1 = (c \bar{t}_0) \mathbf{f}_0$$

$$\mathbf{f}_0 = \gamma (\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1) \Rightarrow \boxed{\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_1 = -\gamma \beta}$$

$$c \left(t_1 + \frac{\Delta t}{2} \right) \underbrace{(\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_1)}_0 + c \frac{\Delta t}{2} \underbrace{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)}_{-1} = (c \bar{t}_0) \underbrace{(\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{e}_1)}_{-\gamma \beta}$$

$$\frac{\Delta t}{2} = \gamma \beta \bar{t}_0 \Rightarrow \frac{\beta}{1-\beta} t_1 = \gamma \beta \bar{t}_0$$

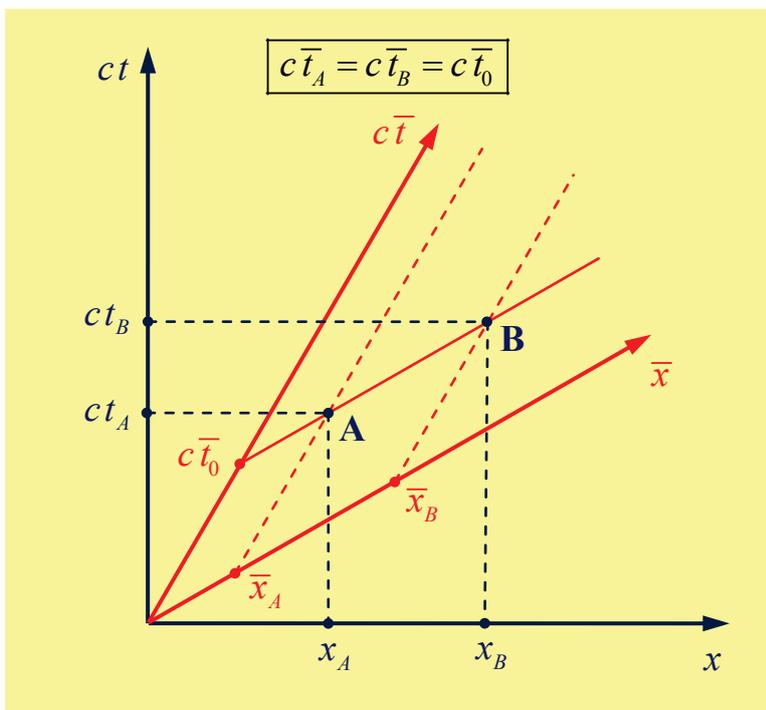
$$\therefore \boxed{k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}} \rightarrow \boxed{\bar{t}_0 = k t_1}$$

Como $\beta = 0.8$ é $k = 3$ e, conseqüentemente, $\bar{t}_0 = 3\text{h}$.

Exercício 29

Os acontecimentos **A** e **B** no espaço-tempo de Minkowski são caracterizados, respectivamente, pelos vectores $\mathbf{r}_A = 3\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^{1,3}$ e $\mathbf{r}_B = 4\mathbf{e}_0 + 3\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^{1,3}$ em termos de um referencial de inércia S . Em S , portanto, **A** é anterior a **B**. Qual deve ser a velocidade relativa (normalizada) $\beta = v/c$ de um outro referencial de inércia \bar{S} em relação a S , de forma que os dois acontecimentos sejam simultâneos em \bar{S} ?

Resolução



O conceito de simultaneidade, em relatividade, é um conceito relativo. Uma forma geométrica apropriada de constatar utiliza os diagramas de Minkowski (figura anexa, que não está à escala). Para que os dois acontecimentos sejam simultâneos no referencial \bar{S} é necessário que a linha que os une seja uma linha de simultaneidade, i.e., que seja paralela ao eixo \bar{x} . Como o

ângulo $\theta = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1) = \angle(\mathbf{e}_0, \mathbf{f}_0)$ entre os eixos x e \bar{x} é tal que $\tan \theta = \beta$, infere-se que – no caso numérico em análise – se tem

$$\beta = \tan \theta = \frac{ct_B - ct_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Note-se que este problema só tem solução para

$$\beta < 1 \Rightarrow \boxed{t_B - t_A < \frac{1}{c}(x_B - x_A)}.$$

Os dois acontecimentos considerados são ambos do tipo tempo: são caracterizados por vectores hiperbólicos uma vez que

$$\mathbf{r}_A^2 = c^2 t_A^2 - x_A^2 = 8 > 0, \quad \mathbf{r}_B^2 = c^2 t_B^2 - x_B^2 = 7 > 0.$$

No referencial \bar{S} tem-se

$$\begin{pmatrix} c\bar{t}_A \\ \bar{x}_A \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_A \\ x_A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c\bar{t}_A = \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \bar{x}_A = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} c\bar{t}_B \\ \bar{x}_B \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c\bar{t}_B = \frac{5}{\sqrt{3}} \\ \bar{x}_B = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vejam os em que circunstâncias é que a causalidade seria violada entre os dois acontecimentos. Em geral, tem-se

$$\begin{cases} \Delta t = t_B - t_A \\ \Delta x = x_B - x_A \end{cases} \Rightarrow \Delta \bar{t} = \bar{t}_B - \bar{t}_A = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right).$$

Definindo a velocidade

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{u}{c} = \frac{\Delta x}{c \Delta t}$$

vem então

$$\Delta \bar{t} = \gamma \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) \Delta t.$$

Desde que $u < c$ e $v < c$, é sempre

$$1 - \frac{uv}{c^2} > 0$$

de forma que não é possível ter

$$\boxed{\text{violação da causalidade}} \rightarrow \boxed{\Delta t \Delta \bar{t} < 0}.$$

Já se admitir que $u > c$ então existe sempre um referencial \bar{S} para o qual é possível encontrar uma velocidade $v < c$ que permita uma violação da causalidade.

A partir do acontecimento «aqui e agora», o «algures absoluto» (i.e., a zona exterior ao cone de luz) é constituída pelos acontecimentos do tipo espaço (i.e., descritos por vectores elípticos). Porém, os acontecimentos do tipo espaço não podem estar ligados ao

acontecimento «aqui e agora» através de uma linha de universo de uma partícula material já que a velocidade desta é necessariamente inferior a c (ver próximo exercício).

Exercício 30

No âmbito da álgebra geométrica $Cl_{1,3}$ um acontecimento é descrito por um vector $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{1,3}$.

Isto significa que, numa base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{R}^4 , se tem $\mathbf{e}_0^2 = 1$ e $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1$. Se fizermos corresponder esta base ao referencial (de inércia) S , é então possível escrever o vector acontecimento, neste referencial, como segue

$$\mathbf{r} = (ct)\mathbf{e}^0 + \vec{r}, \quad \vec{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3.$$

[Nota: Usando a convenção da soma (de Einstein) tem-se $\mathbf{r} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha = x^0\mathbf{e}_0 + x^i\mathbf{e}_i$ sendo, portanto, $\vec{r} = x^i\mathbf{e}_i$.]

Mostre que, se $\mathbf{r}(t)$ descrever a linha de universo de uma dada partícula material, a respectiva velocidade própria é dada pelo vector de $\mathbb{R}^{1,3}$

$$\mathbf{u}(t) = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \gamma(\mathbf{v} + \vec{u}), \quad \vec{u} = u^i \mathbf{e}_i$$

em que $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/d\tau$ (τ é o tempo próprio da partícula), $\mathbf{v} = c\mathbf{e}_0$ e $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ representa a velocidade relativa dessa partícula em S . Considera-se que

$$\gamma = \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad u(t) = |\vec{u}(t)|.$$

Resolução

Comecemos por notar que, sendo τ o tempo próprio da partícula (i.e., o tempo medido por um relógio hipotético que pertence ao referencial próprio instantâneo da partícula onde esta se encontra sempre em repouso), vem

$$\mathbf{r} = (ct)\mathbf{e}_0 + \vec{r}(t) = (c\tau)\mathbf{f}_0.$$

Estamos a considerar que o tal referencial próprio (instantâneo) é descrito por uma base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Note-se que este referencial próprio não tem de ser um referencial de inércia: podemos admitir, se se preferir, que – em cada instante – existe um referencial de inércia (imaginário) que coincide com o referencial próprio. Naturalmente que, também, consideramos a chamada «hipótese dos relógios»: o funcionamento do relógio que mede o

tempo próprio τ não é afectado, por hipótese, pela existência (eventual) de aceleração. Nestas condições, vem

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \left(c\mathbf{e}_0 + \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{dt}{d\tau} (\mathbf{v} + \vec{u}) = c\mathbf{f}_0.$$

Ou seja: no referencial próprio é sempre $\mathbf{u} = c\mathbf{f}_0$ enquanto que, no referencial S , se tem

$$\boxed{\text{referencial } S} \rightarrow \mathbf{u} = \frac{dt}{d\tau} (\mathbf{v} + \vec{u}), \quad \mathbf{u}^2 = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left[\mathbf{v}^2 + (\vec{u})^2 \right].$$

Portanto, no referencial próprio da partícula, é sempre

$$\boxed{\text{referencial próprio}} \rightarrow \mathbf{u} = c\mathbf{f}_0, \quad \mathbf{u}^2 = c^2$$

já que, também para a base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, deverá ter-se $\mathbf{f}_0^2 = 1$ e $\mathbf{f}_1^2 = \mathbf{f}_2^2 = \mathbf{f}_3^2 = -1$.

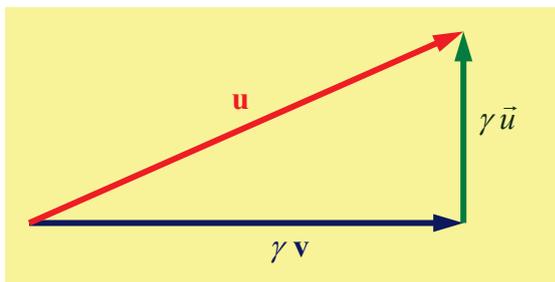
Notando, então, que $\mathbf{v}^2 = c^2$ (pois $\mathbf{v} = c\mathbf{e}_0$) e

$$(\vec{u})^2 = \vec{u}\vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{u} = -|\vec{u}|^2 = -u^2,$$

infere-se que deve ser necessariamente (pois \mathbf{u}^2 é um invariante de Lorentz)

$$c^2 = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left[\mathbf{v}^2 + (\vec{u})^2 \right] \Rightarrow c^2 = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 (c^2 - u^2) \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Este resultado mostra que, efectivamente, $dt/d\tau = \gamma$. A escolha do sinal para a raiz quadrada tem uma explicação simples: quando $u = 0$ deve recuperar-se o resultado $\gamma = 1$. Portanto, em conclusão, tem-se



velocidade própria
da partícula

→

$$\boxed{\mathbf{u} = \gamma (\mathbf{v} + \vec{u})}$$

tal como se pretendia mostrar.

Em $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ esta expressão da velocidade própria da partícula admite uma escrita mais simples.

Com efeito, vem sucessivamente

$$\bar{u} = u \bar{u}_0 = (\beta c) \bar{u}_0, \quad (\bar{u}_0)^2 = -1$$

$$\mathbf{u} = \gamma (\mathbf{v} + \bar{u}) = \gamma (c \mathbf{e}_0 + \beta c \bar{u}_0) = \gamma [1 + \beta (\bar{u}_0 \mathbf{e}_0)] (c \mathbf{e}_0)$$

$$\therefore \mathbf{u} = \gamma (1 + \beta \mathbf{U}_0) \mathbf{v}, \quad \mathbf{U}_0 = \bar{u}_0 \mathbf{e}_0.$$

Logo, notando que se tem

$$\mathbf{U}_0^2 = (\bar{u}_0 \mathbf{e}_0)(\bar{u}_0 \mathbf{e}_0) = -(\bar{u}_0 \mathbf{e}_0)(\mathbf{e}_0 \bar{u}_0) = -(\bar{u}_0)^2 \mathbf{e}_0^2 = 1$$

infere-se que

$$\begin{cases} \gamma = \cosh \zeta \\ \beta = \tanh \zeta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{u} = (\cosh \zeta + \mathbf{U}_0 \sinh \zeta) \mathbf{v} = \exp(\zeta \mathbf{U}_0) \mathbf{v}}.$$

Definindo um rotor

$$R = \exp\left(\frac{\zeta}{2} \mathbf{U}_0\right), \quad \tilde{R} = \exp\left(-\frac{\zeta}{2} \mathbf{U}_0\right), \quad R\tilde{R} = 1$$

vem finalmente

$$\mathbf{u} = R \mathbf{v} \tilde{R} = R^2 \mathbf{v}, \quad R \mathbf{v} = \mathbf{v} \tilde{R}.$$

A operação

$$\mathbf{R}: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3} : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} = \mathbf{R}(\mathbf{v}) = R \mathbf{v} \tilde{R}$$

constitui um *boost*. No caso geral, não tem de ser

$$(c \mathbf{e}_0)(\bar{u} \mathbf{e}_0) = -(\bar{u} \mathbf{e}_0)(c \mathbf{e}_0) \Rightarrow \mathbf{v} \mathbf{U}_0 = -\mathbf{U}_0 \mathbf{v}.$$

No caso geral, com efeito, será

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0 = \underbrace{(\mathbf{v} \lrcorner \mathbf{U}_0) \mathbf{U}_0}_{\mathbf{v}_{\parallel}} + \underbrace{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{U}_0) \mathbf{U}_0}_{\mathbf{v}_{\perp}}$$

de forma que

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\parallel} \mathbf{U}_0 = -\mathbf{U}_0 \mathbf{v}_{\parallel} & \Rightarrow \mathbf{v}_{\parallel} R = \tilde{R} \mathbf{v}_{\parallel} \\ \mathbf{v}_{\perp} \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0 \mathbf{v}_{\perp} & \Rightarrow \mathbf{v}_{\perp} R = R \mathbf{v}_{\perp} \end{cases}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}(\mathbf{v}) = R \mathbf{v} \tilde{R} = R(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}) \tilde{R} = R^2 \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{u}_{\parallel} = R^2 \mathbf{v}_{\parallel} \\ \mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} \end{cases}$$

Exercício 31

Com base nos resultados do exercício anterior deduza a conhecida lei da composição de velocidades «colineares»

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}.$$

Resolução

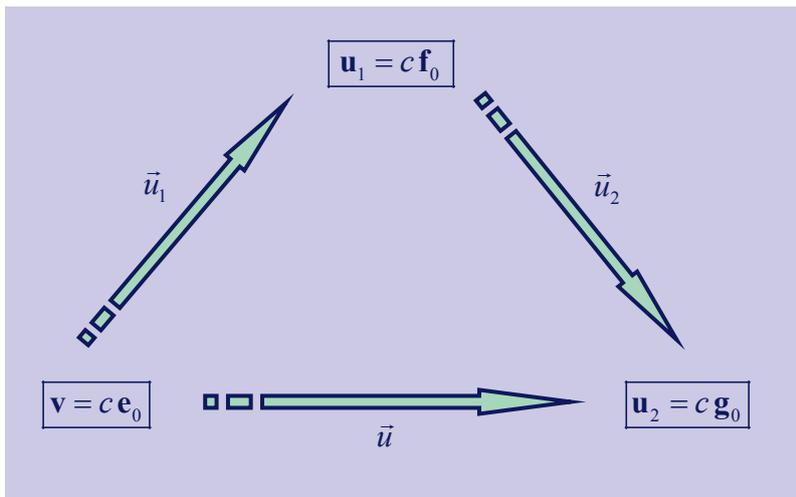
Vem sucessivamente

$$\mathbf{u}_1 = \exp(\zeta_1 \mathbf{U}_0) \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}_2 = \exp(\zeta_2 \mathbf{U}_0) \mathbf{u}_1 = \exp(\zeta \mathbf{U}_0) \mathbf{v}$$

$$\exp(\zeta \mathbf{U}_0) \mathbf{v} = \exp(\zeta_2 \mathbf{U}_0) \exp(\zeta_1 \mathbf{U}_0) \mathbf{v}$$

$$\exp(\zeta \mathbf{U}_0) = \exp[(\zeta_1 + \zeta_2) \mathbf{U}_0]$$

$$\therefore \boxed{\zeta = \zeta_1 + \zeta_2}.$$



Note-se que estamos apenas a considerar velocidades «colineares» no sentido em que

$$\boxed{\text{velocidades «colineares»}} \rightarrow \boxed{\mathbf{U}_0 = \vec{s}_1 \mathbf{e}_0 = \vec{s}_2 \mathbf{f}_0}$$

tal como se indica no esquema anexo. Refira-se que estamos a considerar que \vec{s}_1, \vec{s}_2 são

vectores unitários: $(\vec{s}_1)^2 = (\vec{s}_2)^2 = -1$. Assim, com efeito, tem-se

$$\vec{u}_1 = (\beta_1 c) \vec{s}_1 = u_1 \vec{s}_1, \quad \vec{u}_2 = (\beta_2 c) \vec{s}_2 = u_2 \vec{s}_2, \quad \vec{u} = (\beta c) \vec{s}_1 = u \vec{s}_1$$

$$\therefore \mathbf{U}_0^2 = 1.$$

O termo velocidades «colineares» tem a ver com o facto de se ter

$$\vec{u}_1 \parallel \vec{u} \parallel \vec{s}_1 \Rightarrow \vec{u}_1 = u_1 \vec{s}_1, \quad \vec{u} = u \vec{s}_1.$$

Logo, obtém-se

$$\beta = \tanh \zeta = \tan(\zeta_1 + \zeta_2) = \frac{\tanh \zeta_1 + \tanh \zeta_2}{1 + \tanh \zeta_1 \tanh \zeta_2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$

$$\therefore \boxed{u = \frac{u_1 + u_2}{1 + \frac{u_1 u_2}{c^2}}}$$

Em particular, no caso limite em que $u_1 = u_2 = c$, vem ainda $u = c$ – em conformidade com o segundo postulado de Einstein sobre a invariância da velocidade da luz (no vácuo).

Note-se que, no caso geral, é

$$\vec{u} = (\beta c) \vec{s} = u \vec{s} \rightarrow \mathbf{U}_1 = \vec{s}_1 \mathbf{e}_0 \neq \mathbf{U} = \vec{s} \mathbf{e}_0$$

i.e., existe um ângulo $\theta = \sphericalangle(\vec{s}_1, \vec{s})$. Neste caso a composição de velocidades obedece a uma lei de composição muito mais complexa. Esta complexidade deriva do seguinte (que aqui apenas enunciamos sem demonstração): o conjunto dos *boosts* não constitui um grupo sob a respectiva composição. A chamada rotação de Thomas e a consequente precessão resultam desta característica.

Exercício 32

Considere a base ortonormada de $\mathbb{R}^{1,3}$ que se designa por $\mathcal{B}_s = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Nesta base tem-se, portanto, $\mathbf{e}_0^2 = 1$ e $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -1$. Além disso a base dual será $\mathcal{B}_s^* = \{\mathbf{e}^0, \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$.

Assim, como a matriz da métrica é

$$G = (g_{\alpha\beta}) = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

determine os tensores de Faraday $F^{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta}$, $F^\alpha{}_\beta$ e $F_\alpha{}^\beta$.

Resolução

Atendendo à métrica, tem-se (convenção da soma)

$$\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_\alpha \mathbf{e}^\alpha$$

$$a^\alpha = g^{\alpha\beta} a_\beta, \quad a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta$$

$$\mathbf{e}^\alpha = g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta, \quad \mathbf{e}_\alpha = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\beta$$

em que

$$G^{-1} = (g^{\alpha\beta}) = G = (g_{\alpha\beta}).$$

Nomeadamente, tem-se $\mathbf{e}^0 = \mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}^1 = -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}^2 = -\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}^3 = -\mathbf{e}_3$ e ainda $a^0 = a_0$, $a^1 = -a_1$,

$$a^2 = -a_2 \text{ e } a^3 = -a_3.$$

Comecemos por notar que, e.g., se tem

$$\vec{E} = E^x \mathbf{e}_1 + E^y \mathbf{e}_2 + E^z \mathbf{e}_3 = -(E_x \mathbf{e}_1 + E_y \mathbf{e}_2 + E_z \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{E} = \vec{E} \mathbf{e}_0 = -(E_x \mathbf{e}_{10} + E_y \mathbf{e}_{20} + E_z \mathbf{e}_{30})$$

$$\mathbf{E} \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_{23} + E_y \mathbf{e}_{31} + E_z \mathbf{e}_{12}$$

de forma que

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{I} \mathbf{B} \quad \mathbf{F} = -\frac{1}{c} (E_x \mathbf{e}_{10} + E_y \mathbf{e}_{20} + E_z \mathbf{e}_{30}) + (B_x \mathbf{e}_{23} + B_y \mathbf{e}_{31} + B_z \mathbf{e}_{12}) \\ \mathbf{G} = \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{I} \mathbf{H} \quad \mathbf{G} = -(D_x \mathbf{e}_{10} + D_y \mathbf{e}_{20} + D_z \mathbf{e}_{30}) + \frac{1}{c} (H_x \mathbf{e}_{23} + H_y \mathbf{e}_{31} + H_z \mathbf{e}_{12}) \end{array} \right.$$

Para construir o tensor de Faraday há que definir a função anti-simétrica $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$ recorrendo ao seu bivector característico. Assim,

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \lrcorner \mathbf{F}$$

o que implica que

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{F}(\mathbf{e}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{e}^0) = \frac{1}{c} (E_x \mathbf{e}_1 + E_y \mathbf{e}_2 + E_z \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{F}(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{F}(\mathbf{e}^1) = \frac{E_x}{c} \mathbf{e}_0 + B_y \mathbf{e}_3 - B_z \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{F}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{F}(\mathbf{e}^2) = \frac{E_y}{c} \mathbf{e}_0 - B_x \mathbf{e}_3 + B_z \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{F}(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{F}(\mathbf{e}^3) = \frac{E_z}{c} \mathbf{e}_0 + B_x \mathbf{e}_2 - B_y \mathbf{e}_1 \end{array} \right.$$

de modo que

$$\mathbf{F}^{\alpha\beta} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{F}(\mathbf{e}^\beta), \quad \mathbf{F}_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{F}(\mathbf{e}_\beta), \quad \mathbf{F}_\alpha{}^\beta = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{F}(\mathbf{e}^\beta), \quad \mathbf{F}^\alpha{}_\beta = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{F}(\mathbf{e}_\beta).$$

Daqui se tiram as formas matriciais do tensor de Faraday.

$$\text{tensor } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ anti-simétrico} \rightarrow \mathbf{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{tensor } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ anti-simétrico ou forma-2} \rightarrow \mathbf{F}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{tensores mistos } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

A escrita tensorial correcta dos tensores propriamente ditos (e não apenas das suas componentes) implica a notação

$$\mathfrak{F}_A = \mathbf{F}^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta, \quad \mathfrak{F}_B = \mathbf{F}_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta, \quad \mathfrak{F}_C = \mathbf{F}^{\alpha}_{\beta} \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta, \quad \mathfrak{F}_D = \mathbf{F}^{\alpha}_{\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta.$$

Com efeito, sendo $V = \mathbb{R}^{1,3}$ o nosso espaço linear (ou vectorial) e V^* o respectivo espaço dual tal que (onde, portanto, ω é uma forma-1)

$$V^* = \{ \omega \mid \omega : V \rightarrow \mathbb{R} \},$$

$$\mathfrak{F}_A : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}_B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}_C : V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathfrak{F}_D : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Por exemplo, a aplicação da forma-2 a dois vectores conduz a um número real:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \\ \mathbf{b} = b^\alpha \mathbf{e}_\alpha \end{cases} \rightarrow \mathfrak{F}_B(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{F}_{\alpha\beta} a^\mu b^\nu \mathbf{e}^\alpha(\mathbf{e}_\mu) \mathbf{e}^\beta(\mathbf{e}_\nu) = \mathbf{F}_{\alpha\beta} a^\mu b^\nu \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta = \mathbf{F}_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta \in \mathbb{R}.$$

Exercício 33

Explique de que forma se pode obter, em $C\ell_{1,3}$, o bivector de Faraday a partir do potencial vector

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \Phi \mathbf{e}_0 + \vec{A} \in \mathbb{R}^{1,3}.$$

Designa-se por Φ o potencial escalar e por $\vec{A} \in \mathbb{R}^{0,3}$ o potencial vector relativo. Mostre ainda que, no vácuo, a condição de Lorenz $\partial \cdot \mathbf{A} = 0$ conduz à equação de onda

$$\partial^2 \mathbf{A} = \eta_0 \mathbf{J}.$$

Resolução

Em $C\ell_{1,3}$ o operador de Dirac ∂ escreve-se

$$\partial = \mathbf{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c} \mathbf{e}_0 + \nabla \in \mathbb{R}^{1,3}, \quad \nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \in \mathbb{R}^{0,3}.$$

Como o bivector de Faraday tem a forma

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{I} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{I} = \frac{1}{c} \vec{E} \mathbf{e}_0 + (\vec{B} \mathbf{e}_0) \mathbf{e}_{0123} = \frac{1}{c} \vec{E} \mathbf{e}_0 + \vec{B} \mathbf{e}_{123}$$

facilmente se verifica que

$$\boxed{\mathbf{F} = \partial \wedge \mathbf{A}}.$$

Com efeito, tem-se

$$\begin{aligned} \partial \wedge \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{c} \mathbf{e}_0 \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) \wedge \left(\frac{\Phi}{c} \mathbf{e}_0 + \vec{A} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \mathbf{e}_0 - \frac{1}{c} (\nabla \Phi) \mathbf{e}_0 + \nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{c} \vec{E} \mathbf{e}_0 + \vec{B} \mathbf{e}_{123} \\ \therefore \begin{cases} \vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = -(\nabla \wedge \vec{A}) \mathbf{e}_{123} = \nabla \times \vec{A} \end{cases} \end{aligned}$$

Por outro lado, a equação de Maxwell homogénea obtém-se de forma imediata

$$\boxed{\text{eq. de Maxwell homogénea}} \rightarrow \boxed{\partial \wedge \mathbf{F} = \partial \wedge \partial \wedge \mathbf{A} = 0}.$$

No vácuo, tem-se

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \rightarrow \mathbf{G} = \frac{1}{\eta_0} \mathbf{F}$$

pelo que, da equação de Maxwell não homogénea, vem

$$\partial \lrcorner \mathbf{G} = \mathbf{J} \Rightarrow \partial \lrcorner \mathbf{F} = \eta_0 \mathbf{J}.$$

Mas então

$$\partial \lrcorner (\partial \wedge \mathbf{A}) = \eta_0 \mathbf{J} \Rightarrow (\partial \cdot \partial) \mathbf{A} - \partial (\partial \cdot \mathbf{A}) = \eta_0 \mathbf{J}.$$

Logo, impondo o *gauge* de Lorenz

$$\boxed{\text{condição de Lorenz}} \rightarrow \boxed{\partial \cdot \mathbf{A} = 0}$$

obtém-se efectivamente

$$\boxed{\partial^2 \mathbf{A} = \eta_0 \mathbf{J}}.$$

Note-se que a condição de Lorenz (e não Lorentz!) conduz a

$$\partial \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0} \leftarrow \boxed{\text{gauge de Lorenz}}.$$

A equação de onda admite, por sua vez, uma separação em duas equações distintas como segue

$$\partial^2 \mathbf{A} = \eta_0 \mathbf{J} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}.$$

Sublinhe-se que o dalembertiano ∂^2 é tal que

$$\partial^2 = \partial \cdot \partial = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_0 + \nabla \right) \cdot \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_0 + \nabla \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

uma vez que

$$\nabla \cdot \nabla = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\nabla^2.$$

Exercício 34

Interprete as componentes «temporal» e «espacial» da força de Lorentz em $Cl_{1,3}$:

$$\mathbf{f} = m \dot{\mathbf{u}} = q(\mathbf{F} \lrcorner \mathbf{u}).$$

Resolução

Está-se a considerar uma partícula de massa (própria) m e carga eléctrica q imersa num campo electromagnético descrito pelo bivector de Faraday \mathbf{F} . A velocidade própria da

partícula é $\mathbf{u} = c\mathbf{f}_0 = \gamma(\mathbf{v} + \vec{u})$ onde $\mathbf{v} = c\mathbf{e}_0$ é a velocidade própria de um observador no «laboratório». Notando que $\mathbf{E} = \vec{E}\mathbf{e}_0 = \vec{E} \wedge \mathbf{e}_0$ é o bivector (relativo) do campo eléctrico e que $\mathbf{B} = \vec{B}\mathbf{e}_0 = \vec{B} \wedge \mathbf{e}_0$ é o bivector (relativo) do campo magnético, o bivector de Faraday escreve-se

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}\mathbf{E} + \mathbf{IB} = \frac{1}{c}\vec{E}\mathbf{e}_0 + \vec{B}\mathbf{e}_{123}$$

onde \mathbf{E} é um bivector hiperbólico (i.e., $\mathbf{E}^2 > 0$) e $\mathbf{IB} = \mathbf{BI}$ é um bivector elíptico (i.e., $(\mathbf{IB})^2 = \mathbf{I}^2\mathbf{B}^2 = -\mathbf{B}^2 < 0$). Como sempre, tem-se

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_{0123} = \mathbf{e}_0\mathbf{e}_{123} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}^2 = (\mathbf{e}_0\mathbf{e}_{123})^2 = -\mathbf{e}_0^2\mathbf{e}_{123}^2 = -1.$$

Note-se que, ao contrário de $C\ell_3$, em $C\ell_{1,3}$ é

$$\mathbf{e}_{123}^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{23})(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{23}) = \mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_{23}^2 = (-1)(-1) = 1.$$

Analisemos, então, a contracção à direita

$$\mathbf{F} \lrcorner \mathbf{u} = \left(\frac{1}{c}\vec{E}\mathbf{e}_0 + \vec{B}\mathbf{e}_{123} \right) \lrcorner [\gamma(c\mathbf{e}_0 + \vec{u})] = \gamma \left[(\vec{E}\mathbf{e}_0) \lrcorner \mathbf{e}_0 \right] + \frac{\gamma}{c} \left[(\vec{E}\mathbf{e}_0) \lrcorner \vec{u} \right] + \gamma \left[(\vec{B}\mathbf{e}_{123}) \lrcorner \vec{u} \right]$$

onde se teve em consideração que

$$(\vec{B}\mathbf{e}_{123}) \lrcorner \mathbf{e}_0 = 0.$$

Apesar de $\mathbb{R}^{0,3}$ ser diferente, enquanto espaço quadrático, do subespaço $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3,0} \subset C\ell_3$, podemos considerar a soma ortogonal

$$\mathbb{R}^{1,3} = \mathbb{R}^{1,0} \perp \mathbb{R}^{0,3} \subset C\ell_{1,3}.$$

Neste sentido podemos escrever que

$$(\vec{B}\mathbf{e}_{123}) \lrcorner \vec{u} = -[\vec{u} \lrcorner (\vec{B}\mathbf{e}_{123})] = \vec{u} \times \vec{B}.$$

A única diferença é que, agora, devemos considerar

$$\left| \begin{array}{l} \vec{u} = u^i \mathbf{e}_i \\ \vec{B} = B^j \mathbf{e}_j \end{array} \right. \rightarrow \vec{u} \times \vec{B} = \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{array} \right| = (u^2 B^3 - u^3 B^2)\mathbf{e}_1 + (u^3 B^1 - u^1 B^3)\mathbf{e}_2 + (u^1 B^2 - u^2 B^1)\mathbf{e}_3$$

Por outro lado, tem-se

$$(\vec{E}\mathbf{e}_0) \lrcorner \mathbf{e}_0 = (\vec{E}\mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0 = \vec{E}\mathbf{e}_0^2 = \vec{E}$$

e ainda

$$(\vec{E}\mathbf{e}_0) \lrcorner \vec{u} = -[\vec{u} \lrcorner (\vec{E} \wedge \mathbf{e}_0)] = -[(\vec{u} \cdot \vec{E})\mathbf{e}_0 - (\vec{u} \cdot \mathbf{e}_0)\vec{E}] = -(\vec{u} \cdot \vec{E})\mathbf{e}_0.$$

Ou seja

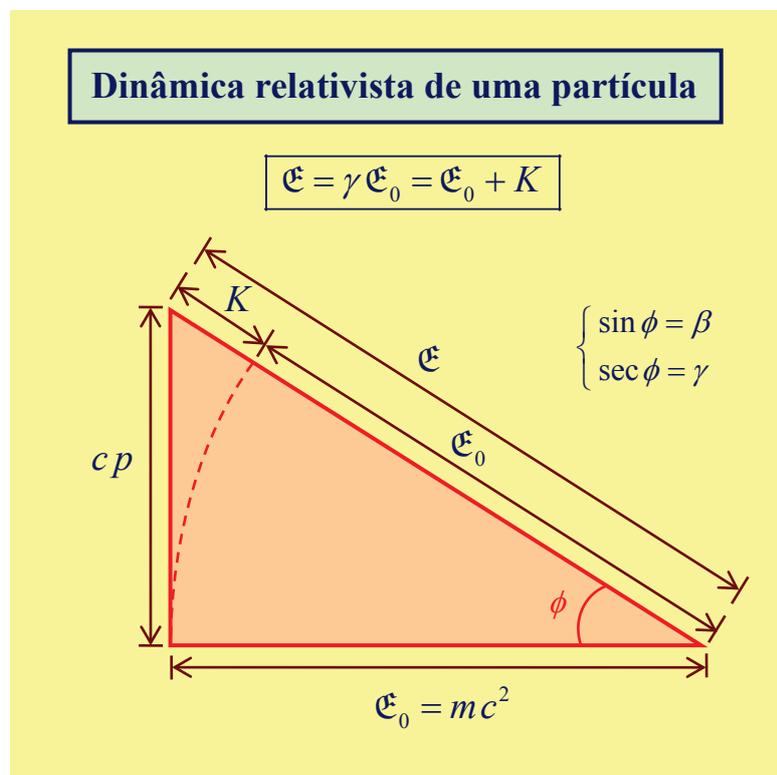
$$\mathbf{F} \perp \mathbf{u} = -\frac{\gamma}{c}(\vec{u} \cdot \vec{E})\mathbf{e}_0 + \gamma(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

Vejamos, agora, a força própria \mathbf{f} . Começemos por notar que o momento linear próprio da partícula é

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \gamma m(c\mathbf{e}_0 + \vec{u}) = \frac{\mathfrak{E}}{c}\mathbf{e}_0 + \vec{p} = m c \mathbf{f}_0 \Rightarrow \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \mathbf{f}_0^2 = m^2 c^2$$

em que se tem

$$\mathfrak{E} = \gamma m c^2 = \gamma \mathfrak{E}_0, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{u}.$$



Note-se que $\mathfrak{E}_0 = m c^2$ é a «energia intrínseca» ou energia em repouso da partícula. O teorema da inércia da energia estabelece, então, que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathfrak{E}}{c}\mathbf{e}_0 + \vec{p}\right)^2 &= m^2 c^2 \\ \left(\frac{\mathfrak{E}}{c}\right)^2 + (\vec{p})^2 &= \left(\frac{\mathfrak{E}_0}{c}\right)^2 \\ \left(\frac{\mathfrak{E}}{c}\right)^2 - p^2 &= \left(\frac{\mathfrak{E}_0}{c}\right)^2 \\ \therefore \boxed{\mathfrak{E}^2 = c^2 p^2 + \mathfrak{E}_0^2} \end{aligned}$$

A energia cinética K é pois, como se indica na figura anexa,

dada por $K = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$. Note-se que $(\vec{p})^2 = -|\vec{p}|^2 = -p^2$. A velocidade relativa u da partícula (tal como registada pelo observador do laboratório) é dada por

$$u = |\vec{u}| = \frac{d\mathfrak{E}}{dp}.$$

Logo, do teorema da inércia da energia, obtém-se

$$\mathfrak{E}^2 = c^2 p^2 + \mathfrak{E}_0^2 \Rightarrow 2\mathfrak{E} \frac{d\mathfrak{E}}{dp} = 2c^2 p \Rightarrow u = \frac{d\mathfrak{E}}{dp} = \frac{c^2 p}{\mathfrak{E}}$$

de forma que

$$\beta = \frac{u}{c} = \frac{cp}{\mathcal{E}} = \sin \phi \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sec \phi = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}.$$

Portanto, a força própria que actua sobre a partícula será

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \mathbf{e}_0 + \vec{f} \right), \quad \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

sendo \vec{f} a força relativa. Como $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$, infere-se ainda que

$$\mathbf{f} = m\dot{\mathbf{u}}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}.$$

Como $\mathbf{u} = \gamma(c\mathbf{e}_0 + \vec{u})$, resulta daqui que

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \gamma^2 \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \vec{f} \cdot \vec{u} \right) = m(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}).$$

Ora, atendendo a que

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = c^2 \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0}$$

infere-se então que

$$\boxed{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = 0} \Rightarrow \boxed{\vec{f} \cdot \vec{u} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}}.$$

A conclusão deste exercício é agora evidente.

$$\mathbf{f} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \mathbf{e}_0 + \vec{f} \right) = q(\mathbf{F} \perp \mathbf{u}) = \gamma \left[-\frac{q}{c} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \mathbf{e}_0 + q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \right]$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{q}{c} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \\ \vec{f} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \end{cases}$$

Note-se que a equação $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ é apenas a expressão sobejamente conhecida da força de Lorentz em três dimensões. Quanto à equação

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{q}{c} (\vec{u} \cdot \vec{E})$$

ela nada traz de novo. Com efeito,

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{f} \cdot \vec{u} = q(\vec{E} \cdot \vec{u}).$$

Mas, como se viu anteriormente,

$$\vec{f} \cdot \vec{u} = q(\vec{E} \cdot \vec{u}) = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Esta equação é sempre válida para uma força pura, i.e., para uma força em que a massa própria da partícula não varie ao longo do tempo (como, e.g., numa explosão). Para uma força que não seja pura teria de se escrever

$$\mathbf{f} = \frac{d}{d\tau}(m\mathbf{u}) = m\dot{\mathbf{u}} + \dot{m}\mathbf{u}, \quad \dot{m} = \frac{dm}{d\tau}.$$

Logo, para uma força que não fosse pura (impura?), viria

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = m \underbrace{(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u})}_0 + \dot{m}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = c^2 \frac{dm}{d\tau}.$$

Porém, para uma força exclusivamente electromagnética, é $dm/d\tau = 0$ e, conseqüentemente,

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ ou ainda}$$

$$\vec{f} \cdot \vec{u} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Nota final: O bivector \mathbf{F} exprime a intensidade do campo electromagnético. Essa intensidade traduz-se na força de Lorentz, i.e., na acção do campo electromagnético sobre uma partícula carregada (ou até sobre uma distribuição «contínua» de carga eléctrica). Uma carga «pontual» q sofre a acção do campo eléctrico mesmo quando parada (como em electrostática); em movimento o campo magnético passa a actuar sobre a partícula, juntando-se ao campo eléctrico, por intermédio da velocidade relativa desta. Somos levados a concluir que o campo magnético só se manifesta quando existem cargas eléctricas em movimento: o campo magnético é um campo eléctrico mais o movimento relativo. Isto sugere que, na magnetostática (em que existe um campo magnético, e.g., produzido por um íman estático) o campo magnético deve ser, de alguma forma, o resultado do movimento interno das cargas eléctricas que constituem o material: o íman, no exemplo considerado), traduzindo-se esse movimento em correntes de fuga (*eddy currents*). O campo magnético do nosso planeta é uma consequência do seu movimento de rotação. Do ponto de vista epistemológico, portanto, as equações de Maxwell são o inverso da força de Lorentz: ao contrário da força de Lorentz, que nos diz como o campo electromagnético actua sobre as cargas eléctricas, as equações de Maxwell dizem-nos que tipo de campo electromagnético resulta das fontes que o produzem – as cargas eléctricas e as correntes eléctricas. Note-se, finalmente, que a carga q que figura na força de Lorentz é aquilo que, em electrodinâmica clássica, se designa por «carga de teste»: a

carga sofre a acção do campo exterior, onde está imersa, e essa acção tem um comportamento linear – no sentido em que não se considera a eventual interacção desse campo pré-instalado exterior com o campo que (também) a carga deverá produzir.

Exercício 35

Sugira um método experimental para a medição do coeficiente de dilatação do tempo com base no efeito Doppler. Admita que a aceleração não afecta o funcionamento dos relógios.

Resolução

No efeito Doppler a frequência ω_r do receptor está relacionada com a frequência ω_e do emissor através da expressão geral

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \gamma(1 - \beta \cos \theta)$$

em que, como de costume, se considera que $\beta = v/c$. Está-se a admitir que a velocidade relativa entre o emissor e o receptor é v e que existe um ângulo θ entre a direcção do fóton emitido e a direcção da velocidade relativa. O efeito Doppler longitudinal corresponde a $\theta = 0$ enquanto que o efeito Doppler transversal corresponde a $\theta = \pi/2$. No caso do efeito Doppler longitudinal, portanto, tem-se

$$\frac{\omega_r}{\omega_e} = \gamma(1 - \beta) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Assim, quando existe um afastamento entre o emissor e o receptor, é $\beta > 0$ e, portanto, $\omega_r < \omega_e$ (*redshift*: desvio para o vermelho). Porém, quando se verifica uma aproximação entre o emissor e o receptor, é $\beta < 0$ pelo que $\omega_r > \omega_e$ (*blueshift*: desvio para o azul). A expansão do universo implica, deste modo, um desvio para o vermelho no espectro da radiação electromagnética recebida das estrelas.

No efeito Doppler transversal, por outro lado, é $\theta = \pi/2$ o que implica que

$$\boxed{\text{efeito Doppler transversal}} \rightarrow \boxed{\frac{\omega_r}{\omega_e} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}}$$

Logo, neste caso, é possível medir experimentalmente o coeficiente γ (o coeficiente de dilatação do tempo) a partir de uma medição de ω_r/ω_e .

Suponhamos que o receptor efectua um movimento de translação à volta do emissor, percorrendo uma trajectória circular, de raio a , com uma velocidade angular Ω constante. Se se admitir que os relógios não são afectados pela aceleração, temos então uma situação em que o efeito Doppler é puramente transversal pelo que, como se viu, $\gamma = \omega_r/\omega_e$. Mais precisamente, tem-se então

$$\boxed{\frac{\omega_r}{\omega_e} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega a}{c}\right)^2}}}$$

A confirmação experimental desta fórmula é, deste modo, uma verificação (indirecta) da dilatação do tempo.

Exercício 36

Uma fonte emissora de luz é observada, por dois observadores em movimento relativo, sob diferentes ângulos. Discuta este efeito (conhecido por aberração).

Resolução

A constante de propagação de um fóton é um vector nulo. Isto significa que podemos escrever a tangente à trajectória de um fóton na forma de um vector nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{1,3}$, i.e., com $\mathbf{n}^2 = 0$. Vem então sucessivamente:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_0 + \vec{s}_1 = \mathbf{f}_0 + \vec{s}_2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \vec{s}_1 = -\alpha_1 \mathbf{e}_1 - \alpha_2 \mathbf{e}_2 \\ \vec{s}_2 = -\beta_1 \mathbf{f}_1 - \beta_2 \mathbf{f}_2 - \beta_3 \mathbf{f}_3 \end{cases}$$

$$1 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 1 - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) = 0$$

$$\begin{cases} \mathbf{f}_0 = \gamma(\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{f}_1 = \gamma(\mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_0) \\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{f}_1 = \gamma \beta \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f}_1 = -\gamma \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = \cos \theta \\ \alpha_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{f}_1 - \alpha_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f}_1) - \alpha_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}_1) \\ \beta_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = \alpha_2 \\ \beta_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \gamma \beta + \gamma \alpha_1 = \gamma(\beta + \cos \theta)$$

$$\therefore \boxed{\bar{s}_2 = -\gamma(\beta + \cos \theta) \mathbf{f}_1 - \sin \theta \mathbf{f}_2 = -\cos \bar{\theta} \mathbf{f}_1 - \sin \bar{\theta} \mathbf{f}_2}$$

$$\tan \theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1}, \quad \tan \bar{\theta} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_2}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_1} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\beta + \cos \theta)}$$

$$\cos \bar{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \bar{\theta}}} = \frac{\gamma(\beta + \cos \theta)}{\sqrt{\gamma^2(\beta + \cos \theta)^2 + 1 - \cos^2 \theta}}$$

$$\gamma^2 = 1 + \gamma^2 \beta^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\cos \bar{\theta} = \frac{\beta + \cos \theta}{1 + \beta \cos \theta}}.$$

O fotão que, no referencial S , é observado sob um ângulo θ é então observado, em \bar{S} , sob um ângulo $\bar{\theta}$ que se relaciona com θ pela expressão da aberração que se acaba de deduzir. Naturalmente que, quando $\beta = 0$, se recupera o caso $\bar{\theta} = \theta$. Porém, quando $\beta \rightarrow 1$, verifica-se que $\bar{\theta} \rightarrow 0$.

Note-se que, para valores pequenos de β , se pode utilizar a aproximação

$$\begin{aligned} \cos \bar{\theta} &= \frac{\beta + \cos \theta}{1 + \beta \cos \theta} \approx (\beta + \cos \theta)(1 - \beta \cos \theta) \\ &= \beta - \beta^2 \cos \theta + \cos \theta - \beta \cos^2 \theta \approx \beta + \cos \theta - \beta \cos^2 \theta \\ &= \cos \theta + \beta \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Assim, definindo $\phi = \theta - \bar{\theta}$ e tendo em conta esta aproximação, vem

$$\left| \begin{array}{l} \cos \bar{\theta} \approx 1 - \frac{\bar{\theta}^2}{2} \\ \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{array} \right. \rightarrow \cos \bar{\theta} - \cos \theta \approx \frac{1}{2}(\theta^2 - \bar{\theta}^2) = \frac{1}{2} \overbrace{(\theta + \bar{\theta})}^{\approx 2\theta} (\theta - \bar{\theta}) \approx \underbrace{(\theta - \bar{\theta})}_{\phi} \sin \theta$$

$$\therefore \phi \sin \theta \approx \beta \sin^2 \theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi \approx \beta \sin \theta}.$$

Exercício 37

Definindo o operador momento-energia $\mathbb{T} : \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathbb{R}^{1,3} : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{b} = \mathbb{T}(\mathbf{a})$ tal que

$$\mathbb{T}(\mathbf{a}) = -\frac{1}{2\mu_0}(\mathbf{F} \mathbf{a} \mathbf{F}) = \frac{1}{2\mu_0}(\mathbf{F} \mathbf{a} \tilde{\mathbf{F}})$$

interprete o significado físico do vector $\mathbb{T}(\mathbf{e}_0)$.

Resolução

Atendendo a que se tem

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \mathbf{E} + \mathbf{I} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \vec{E} \mathbf{e}_0 + \vec{B} \mathbf{e}_{123}$$

infere-se que (recorda-se aqui que, em $C\ell_{1,3}$, é $\mathbf{e}_{123}^2 = 1$)

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbf{e}_0) &= -\frac{1}{2\mu_0} (\mathbf{F} \mathbf{e}_0 \mathbf{F}) = -\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{c} \vec{E} + \vec{B} \mathbf{e}_{123} \mathbf{e}_0 \right) \left(\frac{1}{c} \vec{E} \mathbf{e}_0 + \vec{B} \mathbf{e}_{123} \right) \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \left\{ \left[\frac{1}{c^2} (\vec{E})^2 + (\vec{B})^2 \right] \mathbf{e}_0 + \frac{1}{c} (\vec{E} \vec{B} - \vec{B} \vec{E}) \mathbf{e}_{123} \right\} \\ &= \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \right) \mathbf{e}_0 - \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \mathbf{e}_{123} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\mathbb{T}(\mathbf{e}_0) = \hat{\mathcal{E}} \mathbf{e}_0 + \frac{1}{c} \vec{S}$$

onde se fez

$$\left| \begin{array}{l} \text{densidade volúmica de energia} \\ \text{vector de Poynting} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \hat{\mathcal{E}} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \\ \vec{S} = -\frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \mathbf{e}_{123} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \end{array}$$

Enquanto que $\hat{\mathcal{E}}$ representa a densidade volúmica de energia electromagnética, \vec{S} é o vector de Poynting. Note-se que

$$\boxed{\text{densidade volúmica de momento linear}} \rightarrow \boxed{\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}}$$

é a densidade volúmica de momento linear e

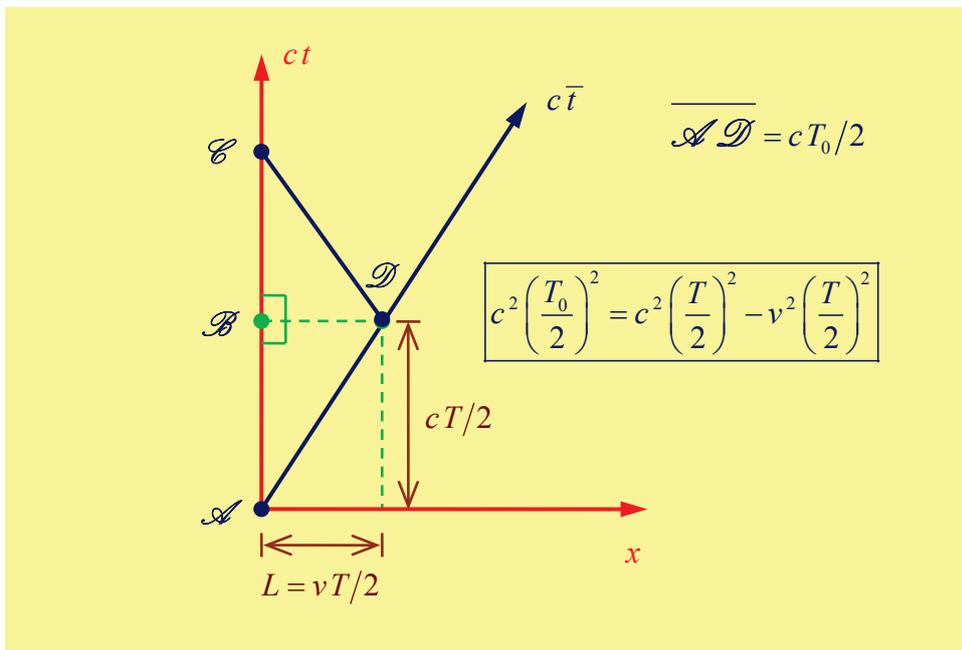
$$\boxed{\text{densidade de fluxo de momento linear}} \rightarrow \boxed{c \vec{g} = \frac{1}{c} \vec{S}}$$

é a densidade de fluxo de momento linear. Em unidades SI (que são sempre as unidades utilizadas) vem

$$[\hat{\mathcal{E}}] = \text{J m}^{-3}, \quad [S] = \text{W m}^{-2} = \text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}.$$

Exercício 38

Considere dois observadores: António e Beatriz. António parte do local em que se encontrava junto a Beatriz com uma velocidade constante $v = \beta c$. Após decorrido algum tempo, António inverte subitamente o sentido do seu movimento e volta a encontrar-se com Beatriz, aproximando-se desta novamente com uma velocidade constante $v = \beta c$. Suponhamos que, tanto António como Beatriz, enviam um ao outro sinais electromagnéticos (uniformemente espaçados no respectivo tempo próprio). Seja f a frequência dessa emissão (i.e., o número de sinais que cada um deles emite na unidade de tempo próprio). O tempo total que dura a viagem, do ponto de vista de Beatriz, é $T = 2L/v$ (em que L é a máxima distância de afastamento de António durante a viagem deste). Usando o efeito Doppler mostre que, do ponto de vista de António, o tempo que dura a sua viagem é $T_0 = 2L/(\gamma v)$, i.e., $T_0 = T/\gamma$ com $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Verifique ainda que, ao contrário do que uma interpretação errada da reciprocidade poderia sugerir, ambos os observadores estão de acordo com esta diferença.

Resolução

No referencial S onde se encontra o observador B (Beatriz), a linha de universo de B corresponde a (ABC) enquanto que a linha de universo de A (António) é (ADC) . O tempo total que dura a viagem, tal como medido por B , é $T = 2L/v$.

Começemos por descrever a viagem do ponto de vista do observador B . A viagem de A até uma distância L durou ao todo um tempo $T = 2L/v$. Vejamos, então, qual o tempo que durou a viagem para o viajante A do ponto de vista de B . Como a viagem durou um tempo total T , o observador B enviou para A um total de

$$N^{(e)} = fT = \frac{2fL}{v}$$

sinais. O observador B detecta a inversão de marcha do viajante A ao fim do tempo t_1 tal que

$$t_1 = \frac{L}{v} + \frac{L}{c} = \frac{L}{v}(1 + \beta).$$

Assim, o número total de sinais recebidos por B nesta viagem de ida é $f_1 t_1$ em que, pelo efeito Doppler relativista já anteriormente discutido, vem

$$f_1 = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Logo, vem

$$f_1 t_1 = \frac{fL}{v} (1 + \beta) \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \frac{fL}{v} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Porém, o tempo que dura a viagem de volta é t_2 tal que

$$t_2 = \frac{L}{v} - \frac{L}{c} = \frac{L}{v}(1 - \beta).$$

Deste modo o número total de sinais recebidos por B durante a viagem de volta é $f_2 t_2$ em que, neste caso,

$$f_2 = f \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

pelo que

$$f_2 t_2 = \frac{fL}{v} (1 - \beta) \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{fL}{v} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Portanto o número total de sinais recebidos por B será

$$N^{(r)} = f_1 t_1 + f_2 t_2 = \frac{2fL}{v} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{2fL}{\gamma v}.$$

O observador B conclui, assim, que a viagem de A terá durado, para o observador A , um tempo total

$$T_0 = \frac{N^{(r)}}{f} = \frac{f_1 t_1 + f_2 t_2}{f} = \frac{2L}{\gamma v}.$$

Vejam, de seguida, a interpretação de A . Para ele a viagem terá durado um tempo total

$$T_0 = \frac{2L}{\gamma v}.$$

Neste tempo ele terá enviado para B um total de

$$N_0^{(e)} = f T_0 = \frac{2fL}{\gamma v} = N^{(r)}$$

sinais – um número que está de acordo com o total de sinais $N^{(r)}$ que B recebeu. Para A a inversão do movimento terá ocorrido ao fim do tempo

$$\bar{t}_1 = \frac{L}{\gamma v}.$$

Durante este tempo ele terá recebido um número de sinais dado por

$$f_1 \bar{t}_1 = \frac{fL}{\gamma v} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{fL}{v} (1-\beta).$$

O tempo da viagem de volta é

$$\bar{t}_2 = \frac{L}{\gamma v}$$

e o número total de sinais recebidos neste lapso de tempo foi de

$$f_2 \bar{t}_2 = \frac{fL}{\gamma v} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{fL}{v} (1+\beta).$$

Assim, o número total de sinais recebidos por A terá sido

$$N_0^{(r)} = f_1 \bar{t}_1 + f_2 \bar{t}_2 = \frac{2fL}{v} = N^{(e)}$$

em conformidade, portanto, com o número de sinais $N^{(e)}$ enviados por B . O viajante A será levado a concluir que, para o observador B , terá decorrido o tempo total

$$T = \frac{N_0^{(r)}}{f} = \frac{f_1 \bar{t}_1 + f_2 \bar{t}_2}{f} = \frac{2L}{v}.$$

Quando os observadores se voltam a encontrar estão, portanto, ambos de acordo que decorreu um tempo total T para B e um tempo total $T_0 = T/\gamma < T$ para A . Não há pois lugar a qualquer paradoxo. A dilatação do tempo é um efeito recíproco, mas A passa por dois referenciais distintos durante a sua viagem criando uma assimetria que se reflecte na diferença de tempos realmente vividos por cada um.